

Név:

Összpontszám:

Klasszikus algebra gyakorlat

1. zárthelyi megoldása (javított változat)

(2017. 03. 31.)

1. Feladat. (4 pont)

(A) Igaz-e, hogy tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén abból, hogy $\sqrt[n]{z}$ -nek van valós értéke következik az, hogy z is valós? Ha igen, akkor egy mondatban indokolja, ha nem, akkor adjon ellenpéldát.

Megoldás. Az állítás **igaz**, mert a valós számok halmaza zárt a szorzásra, így a hatványozásra is.

(B) Van-e olyan egységelemes gyűrű, amelyben végtelen sok invertálható elem van? Ha van, akkor adjon meg egyet, ha nincs ilyen gyűrű, akkor ezt bizonyítsa be.

Megoldás. **Van** ilyen integritástartomány, például bármely végtelen test.

(C) Igaz-e hogy minden $f, g \in \mathbb{Z}_2[x]$ esetén, ha $f|g$ és $g|f$, akkor $f = g$. Ha igaz, akkor röviden bizonyítsa be, ha nem akkor adjon meg egy ellenpéldát.

Megoldás. Az állítás **igaz**, ugyanis a $\mathbb{Z}_2$ testben egyetlen egység van, az 1, azaz az egységelem.

(D) Igaz-e, hogy minden egységelemes gyűrűben $1 + 1 \neq 0$? (Itt 1 a gyűrű multiplikatív-, míg 0 az additív egységelemét jelöli.) Ha igaz, akkor röviden igazolja, ha nem, akkor adjon meg egy ellenpéldát.

Megoldás. Az állítás **hamis**, a $\mathbb{Z}_2$ gyűrűben $1 + 1 = 0$.

2. Feladat. (4 pont)

Adja meg kanonikus alakban a következő gyökvonások eredményét:

$$\sqrt[3]{-2 + 2i} \qquad \sqrt[6]{-27}.$$

Megoldás. A $\sqrt[3]{-2 + 2i}$ értékei:

$$1 + i, \quad -\frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i\frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \quad \frac{\sqrt{3} - 1}{2} - i\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

A $\sqrt[6]{-27}$ értékei:

$$\pm\sqrt{3}i, \quad \mp\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. Feladat. (4 pont)

Határozzon meg olyan $u, v \in \mathbb{R}[x]$ polinomokat, amelyekre $fu + gv = \ln. k. o. (f, g)$, ha

$$f = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1, \text{ és } g = x^4 + 2x^3 + x + 2.$$

Megoldás.

$$-f + (x + 1)g = x^3 + 1$$

4. Feladat. (4 pont)

Oldja meg az $fu + gv = \bar{1}$ egyenletet a $\mathbb{Z}_5[x]$ polinomgyűrűben, ahol

$$f = x^2 + \bar{3}x + \bar{1} \quad \text{és} \quad g = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{4}x + \bar{2}.$$

Megoldás.

$$(x^2 + \bar{4}x + \bar{1})f + (\bar{4}x)g = \bar{1}$$

5. Feladat. (4 pont)

Az alábbi számhalmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, ill. testet:

(A) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\};$

Megoldás. Integritástartomány, de nem test, mert általában nincs multiplikatív inverz. A műveletekre való zártság triviális.

(B) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\};$

Megoldás. Test, egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy minden nemzéró elemnek van multiplikatív inverze is.

(C) $\mathbb{Z}[\alpha] = \{a + b\alpha : a, b \in \mathbb{Z}, \alpha^3 = 1, \alpha \neq 1\};$

Megoldás. Integritástartomány, de nem test. A szorzásra való zártság abból adódik, hogy α harmadik primitív egységgyök, azaz gyöke az $x^2!x + 1 = 0$ egyenletnek. Így $\alpha^2 = -1 - \alpha$.

(D) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{3}\}.$

Megoldás. Nem integritástartomány, mert nem zárt a szorzásra. Pl. $(4 + i)(1 + 4i) = 17i$.