

KOMPLEX SZÁMOK[†]

1. Feladat.° Mi a szükséges és elégséges föltétele annak, hogy két komplex szám összege, ill. szorzata valós szám legyen?

2. Feladat.° Hol helyezkednek el a számsíkon azon $z \in \mathbb{C}$ komplex számok, amelyekre

- (a) $\operatorname{Re} z = a (\in \mathbb{R})$, ill. $\operatorname{Im} z = b (\in \mathbb{R})$;
- (b) $\arg z = \alpha$ ($0 < \alpha < 2\pi$),
- (c) $|z| = 2$, ill. $|z - 2 + i| < \sqrt{3}$,
- (d) $|\bar{z} - i| \leq 1$,
- (e) $0 \leq \arg(zi) < \pi/3$,
- (f) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \geq 1$ (2 pont).

3. Feladat.° Adja meg kanonikus alakban a következő komplex számokat:

$$\left(\frac{i-1}{2+i}\right)^2, \quad \frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}, \quad \frac{(1+i)^7}{(1-i)^5}, \quad \frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}, \text{ ahol } n \in \mathbb{N}.$$

4. Feladat.° Határozza meg azon kanonikus alakú z komplex számokat, amelyekre

- (a) $(1-i)\bar{z} - 3iz = 2-i$,
- (b) $z\bar{z} + 3(z + \bar{z}) = 7$,
- (c) $(2+i)x^2 + (5-i)x + (2-2i) = 0$

5. Feladat.° Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} ix + (1+i)y &= 3-i \\ (1-i)x - (6-i)y &= 4. \end{aligned}$$

6. Feladat.° Melyek azok a (kanonikus alakú) z komplex számok, amelyekre

$$z^2 = 3 + 4i, \quad z^2 = 8 - 6i, \quad z^4 = -16.$$

7. Feladat.° Határozza meg azokat a kanonikus alakú komplex számokat, amelyek négyzete rendre

$$2i, -8i, 3-4i, -15+8i, 8+6i, 8-6i, -8-6i, 1-i\sqrt{3}.$$

8. Feladat.° Határozza meg $n = 2, 3, 4, 6$ -ra az n -edik egységgyököket, s adja meg őket kanonikus alakban is. Melyek közülük primitív egységgyökök?

9. Feladat. Adja meg kanonikus alakban azokat a z komplex számokat, amelyekre

[†]A rutinfeladatokat (az 1 pontosokat) ° jelzi, a többi 2 pontot ér.

- (a) $z^3 + i = 0$,
- (b) $z^3 - 2 - i = 0$,
- (c) $z^6 + 27 = 0$.

10. Feladat. Határozza meg rögzített n -re az összes n -edik egységgyök összegét, ill. szorzatát.

11. Feladat. Legyen α $2n$ -edik primitív egységgyök. Számítsa ki az $1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1}$ összeget.

12. Feladat. Legyen $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Számítsa ki az alábbi komplex számokat.

- (a) $(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$,
- (b) $(a + b)(a + b\omega)(a + b\omega^2)$,

ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$.

13. Feladat.^o Trigonometrikus alakban számolva számítsa ki a $(\sqrt{3} - i)(2 + 2\sqrt{3}i)$ komplex számot. (A végeredményt adja meg kanonikus alakban is.)

14. Feladat.^o Trigonometrikus alakban számolva számítsa ki az alábbi komplex szám értékét. (A végeredményt adja meg kanonikus alakban is.)

$$\frac{(-1 + i)^{2422}}{(\sqrt{3} + i)^{1208}}$$

15. Feladat. Oldja meg a $z^2 + 4\bar{z} = |z|^2 + 6$ egyenletet a komplex számok halmazán.

16. Feladat. Oldja meg az $i\bar{z} = z^2$ egyenletet a komplex számok halmazán.

17. Feladat. Rajzoljunk egy tetszőleges négyszög oldalaira kifelé négyzeteket. Bizonyítsa be, hogy a szemközti oldalakra rajzolt négyzetek középpontjait összekötő szakaszok egyenlő hosszúak és egymásra merőlegesek.

18. Feladat. Rajzoljunk egy tetszőleges háromszög oldalaira kifelé szabályos háromszögeket. Bizonyítsa be, hogy ezen háromszögek középpontjai által meghatározott háromszög szabályos.

19. Feladat.^o Számítsa ki $\sqrt[4]{-1 - \sqrt{3}i}$ mind a négy értékét. (A végeredményt adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban is.)

20. Feladat.^o Számítsa ki $\sqrt[3]{i}$ mindhárom értékét. (A végeredményt adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban is.)

21. Feladat. ° Egységgyök-e a $z = \cos \frac{5\pi}{12} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{12}$ komplex szám? Ha igen, akkor határozza meg mindazokat az n kitevőket, amelyekre z n -edik egységgyök, valamint azt az n természetes számot, amelyre z primitív n -edik egységgyök.

22. Feladat. Határozza meg mindazokat a komplex számokat, amelyek huszonnegyedik és századik egységgyökök is.

23. Feladat. Mikor lehet ε és $\varepsilon + 1$ is egységgyök?

ABSZTRAKT ALGEBRAI STRUKTÚRÁK

24. Feladat.° Legyen A nemüres halmaz.

- (a) Mutassa meg, hogy a $(\mathcal{P}(A); \Delta, \cap)$ algebra egységelemes kommutatív gyűrű.
 (b) Igazolja, hogy tetszőleges $B, C \in \mathcal{P}(A)$ -re megoldható a $B \Delta X = C$ egyenlet.

25. Feladat.° Legyen $H = \{0, 1, 2, 3\}$, és definiáljuk a következő két műveletet:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Mutassa meg, hogy H e két művelettel egységelemes kommutatív gyűrű,

26. Feladat.° Definiáljuk a következő két műveletet a $T = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ halmazon:

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Igazolja, hogy a T e két művelettel test. [E testet általában $GF(5)$ -tel szokás jelölni.]

27. Feladat.° Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e az alábbi halmaz (a szokásos összeadással és szorzással)?

$$\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}, a \text{ páros}\}$$

28. Feladat.° Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e az alábbi halmaz (a szokásos összeadással és szorzással)

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

29. Feladat.° Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e az alábbi halmaz (a szokásos összeadással és szorzással)?

$$\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega : a, b \in \mathbb{Z}\} \quad \omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

30. Feladat. Mutassa meg, hogy tetszőleges nemüres $S \subseteq \mathbb{R}$ esetén ekvivalens az alábbi két feltétel.

- (1) $\forall a, b \in S : a + b \in S$ és $-a \in S$
 (2) $\forall a, b \in S : a - b \in S$

31. Feladat. Határozza meg a $\mathbb{Z}[\omega]$ gyűrű egységeit (lásd 29. feladatot).

32. Feladat. Keressen egy ± 1 -től különböző egységet a $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ gyűrűben, majd ennek segítségével konstruáljon meg végtelen sok egységet.

33. Feladat. Határozza meg a véges tizedestörtek gyűrűjének egységeit.

34. Feladat. Definiáljunk egy újfajta összeadást és egy újfajta szorzást a valós számok halmazán: legyen $a \oplus b = a + b - 1$ és $a \odot b = a + b - ab$. Igazolja, hogy az $(\mathbb{R}; \oplus, \odot)$ struktúra test.

NEVEZETES GYŰRŰK: MARADÉKOSZTÁLY-GYŰRŰK, GAUSS-GYŰRŰK, POLINOMGYŰRŰK

35. Feladat. Szorozza össze az alábbi két polinomot (vagyis adja meg tetszőleges n -re x^n együtthatóját az fg polinomban).

$$f = x^{100} + x^{99} + \cdots + x^2 + x + 1$$

$$g = 100x^{100} + 99x^{99} + \cdots + 2x^2 + x$$

36. Feladat. Számítsa ki a $\mathbb{Z}_{13}$ testben a $\overline{8} + \overline{11}$, $\overline{8} - \overline{11}$, $\overline{8} \cdot \overline{11}$, $\overline{11}/\overline{8}$, $\overline{8}^{11}$, $\overline{11}^{-10}$ elemeket. (Az eredmény $\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{12}$ valamelyike legyen.)

37. Feladat. Keresse meg az $x^3 = \overline{1}$ egyenlet összes megoldását a $\mathbb{Z}_5$, illetve a $\mathbb{Z}_{19}$ testben.

38. Feladat. Végezzen maradékos osztást az $f = x^3 + \overline{1}$, $g = \overline{2}x^2 - \overline{3}x + \overline{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$ polinomokon.

39. Feladat. Határozza meg az $f = x^4 + x^3 + x^2 + \overline{1}$, $g = x^3 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinomok legnagyobb közös osztóját, és adja meg az $fu + gv = (f, g)$ egyenlet egy megoldását.

40. Feladat. Számítsa ki az $f = x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 3$, $g = x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 6$ polinomok legnagyobb közös osztóját, majd ennek segítségével határozza meg f és g közös gyökeit, és végül külön-külön f és g összes gyökét.

41. Feladat. Legyenek a és b pozitív egész számok. Mutassa meg, hogy ha a -t b -vel osztva a maradék r , akkor $(x^a - 1)$ -et $(x^b - 1)$ -gyel osztva $x^r - 1$ lesz a maradék. Ezen megfigyelés segítségével bizonyítsa be, hogy $x^a - 1$ és $x^b - 1$ legnagyobb közös osztója $x^{\text{ln.k.o.}(a,b)} - 1$ (mondjuk az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűben).

42. Feladat.° Legyen $R^N = \{(a_0, a_1, a_2, \dots) : a_i \in \mathbb{R}\}$, és jeölje R_f^N azon részhalmazát, amely az összes olyan sorozatból áll, amelyekben csak véges sok nemzéró tag van. Igazoljuk, hogy e részhalmaz részgyűrű.

43. Feladat.° Oldja meg az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűben az $x^2 \cdot f \equiv x^2 - 2x \pmod{x^3 + x}$ kongruenciát. (Figyelem: nem x az ismeretlen, hanem f !)

44. Feladat. Határozza meg a $8 + i$ és $4 - 2i$ Gauss-egészek legnagyobb közös osztóját.

45. Feladat.° Bizonyítsa be, hogy az alábbi I halmaz ideál a $\mathbb{Z}[x]$ gyűrűben.

$$I = \{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x] : a_0 \text{ páros}\}.$$

46. Feladat. Mutassa meg, hogy az előző feladatbeli ideál nem főideál.

47. Feladat.° Bizonyítsa be, hogy az alábbi I halmaz ideál a $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ gyűrűben.

$$I = \{a + b\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] : a \equiv b \pmod{2}\}.$$

48. Feladat. Mutassa meg, hogy az előző feladatbeli ideál nem főideál.

49. Feladat. Határozza meg az egész számok gyűrűjében az $I = (18) \cap (30)$ ideált. (Mivel $\mathbb{Z}$ főideálgyűrű, van olyan g egész szám, amelyre $I = (g)$. Ezt a g generátort kell megtalálni.) Hogyan lehetne általánosítani?

50. Feladat. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges z komplex számra az

$$I = \{k \in \mathbb{Z} : z^k = 1\}$$

halmaz ideál az egész számok gyűrűjében, továbbá amennyiben z primitív n -edik egységgyök, akkor $I = (n)$.

51. Feladat. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges α komplex számra az alábbi halmaz ideál a $\mathbb{C}[x]$ gyűrűben és adja meg egy generátorelemét.

$$I = \{f \in \mathbb{C}[x] : f(\alpha) = 0\}.$$

52. Feladat. Ellenőrizze, hogy a korlátos valós számsorozatok gyűrűt alkotnak (a szokásos tagonkénti összeadással és szorzással), majd mutassa meg, hogy a nullához konvergáló sorozatok ideált alkotnak ebben a gyűrűben.

53. Feladat.° Írja fel a $\mathbb{Z}_2[x] / (x^2 + x + 1)$ négyelemű test összeadó- és szorzótábláját.

54. Feladat.° Határozza meg a $\mathbb{Z}_3[x] / (x^2 + 1)$ kilencelemű testben az $a \cdot b$, a/b , b/a elemeket, ahol $a = \bar{x}$ és $b = \overline{x+1}$.

55. Feladat.° Határozza meg a $\mathbb{Z}_5[x]/(x^3+1)$ százhuszonötelemű testben a $\overline{2x^2-3x+2}$ elem reciprokát.

TEST FÖLÖTTI EGYHATÁROZATLANOS POLINOMOK

56. Feladat.° Bontsa irreducibilis tényezők szorzatára a valós, ill. a komplex számtest fölött az

- (a) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100$,
- (b) $x^6 + 27$
- (c) $x^5 - 1$

polinomkat.

57. Feladat.° Határozza meg az alábbi polinomok legnagyobb közös osztóját.

- (a) $f = x^3 - 3x + 2$ és $g = x^3 - 2x^2 - x + 2$.
- (b) $f = x^4 - 1$ és $g = x^5 + 2x^3 + x^2 + x + 1$.

58. Feladat. Adja meg az összes legföljebb harmadfokú irreducibilis polinomot a kételemű és a háromelemű test fölött.

59. Feladat.°

- (a) Adja meg az $x^5 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinom irreducibilis felbontását.
- (b) Adja meg az $x^4 + \bar{2}x^3 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$ polinom irreducibilis felbontását.

60. Feladat. Adja meg az $x^p - x \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinom irreducibilis felbontását tetszőleges p prímszám esetén.

61. Feladat.° Bézout tételének segítségével vizsgálja meg, hogy osztja-e a $g = x^2 + \sqrt{2}x + 1$ polinom az $f = x^4 + 1$ polinomot.

62. Feladat.° Bézout tételének segítségével vizsgálja meg, hogy teljesül-e a $g|f$ oszthatóság a $g = x^2 - 1$ és $f = x^{17} - x^{16} + x^{15} - x^{14} + x^7 - x^3 + x - 1$ polinomokra a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_3$, illetve $\mathbb{Z}_7$ testek fölött.

63. Feladat. Mely n pozitív egészekre osztható az $x^n + 1$ polinom az $x^2 + 1$ polinommal?

64. Feladat. Határozza meg az összes olyan p prímszámot, amelyre

$$x^2 + \bar{1} | x^{2008} - \bar{23}x^{1922} + \bar{13}x^{600} + \bar{8}$$

teljesül a $\mathbb{Z}_p[x]$ polinomgyűrűben.

65. Feladat. Igazolja, hogy $x^2 + x + 1$ akkor és csak akkor osztója az $x^{2n} + x^n + 1$ polinomnak, ha n nem osztható 3-mal.

66. Feladat. Legyen $f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós nemkonstans polinom, továbbá a p, q relatív prím egészek olyanok, hogy $f(\frac{p}{q}) = 0$. Igazoljuk a következő állításokat.

- (a) $q|a_n$ és $p|a_0$.
- (b) Tetszőleges $m \in \mathbb{Z}$ -re $p - mq|f(m)$, speciálisan $p - q|f(1)$ és $p + q|f(-1)$.

67. Feladat. Határozza meg az $x^6 + 27$ polinom komplex gyökeit, majd bontsa irreducibilis tényezők szorzatára $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}$ felett.

68. Feladat. Határozza meg az $x^8 - 16$ polinom komplex gyökeit, majd bontsa irreducibilis tényezők szorzatára $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}$ felett.

69. Feladat. Határozza meg az $x^4 + x^2 - 30$ polinom komplex gyökeit, majd bontsa irreducibilis tényezők szorzatára $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}$ felett.

70. Feladat. Határozza meg az $f = (x - 1)(x^2 - 1)(x^3 - 1)(x^4 - 1)$ és $g = (x + 1)(x^2 + 1)(x^3 + 1)(x^4 + 1)$ polinomok irreducibilis faktorizációját a kedvenc számteste felett, majd ennek segítségével számítsa ki f és g legnagyobb közös osztóját.

71. Feladat. Képzeld el (de ne írd föl!) az $x^{100} - 1$ és $x^8 - 1$ polinomok gyöktényező alakját, majd határozza meg ennek segítségével a legnagyobb közös osztójukat. A 41. feladatot nem ér felhasználni!

72. Feladat. Képzeld el (de ne írd fel!) az $x^{1973} - 1997$ polinom irreducibilis felbontását $\mathbb{R}$ felett. Hány tényezőt lát (a lelki szemeivel), és hányadfokúak ezek?

73. Feladat. Keresse meg az $x^6 + 2x^5 + x^4 + 22x^3 + 55x^2 + 44x + 11$ polinom racionális gyökeit, majd adja meg a $\mathbb{Q}$ feletti irreducibilis felbontását.

74. Feladat. Igazolja, hogy az $x^7 - 7x^6 + 24x^5 - 50x^4 + 68x^3 - 57x^2 + 25x - 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. (Útmutatás: Térjünk át az $y = x - 1$ határozatlanra.)

75. Feladat. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges T test és tetszőleges

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in T$, $a_0, a_n \neq 0$ elemek esetén az $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in T[x]$ polinom akkor és csak akkor irreducibilis, ha $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ is az.

76. Feladat. Adjon meg végtelen sok olyan n egész számot, melyre az $x^2 + 100x + n$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, és végtelen sok olyat is, amelyre nem irreducibilis.

77. Feladat. Alakítsa át az $f = x^4 + 8ix^3 - 26x^2 - 40ix + 21 \in \mathbb{C}[x]$ polinomot az $x + 2i$ polinom hatványai szerint rendezett alakba, és az elvégzett átalakítás segítségével határozza meg f gyökeit.

78. Feladat.° Hányszoros gyöke a 2 szám az $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ polinomnak? Oldja meg a feladatot Horner-elrendezéssel és deriválással is.

79. Feladat.° Határozza meg a $3x^4 - 4x^3 + 1$ polinom többszörös gyökeit, majd adja meg a gyöktényezős felbontását.

80. Feladat. Az a valós paraméter mely értékeire lesz a -1 kétszeres gyöke az $x^5 - ax^2 - ax + 1$ polinomnak?

81. Feladat. Határozza meg a b és c komplex paraméterek értékét úgy, hogy legyen háromszoros gyöke az $x^5 - 5x^3 + 5bx + c \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak.

82. Feladat. Határozza meg az A, B valós paraméterek azon értékeit, amelyekre az 1 kétszeres gyöke az $Ax^n + Bx^{n-1} + 1$ polinomnak ($n \geq 2$ tetszőleges adott természetes szám).

83. Feladat. Mikor osztható egy polinom a saját deriváltjával?

84. Feladat.° Oldja meg az $x^3 + 9x - 26 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

85. Feladat. Oldja meg az $x^3 + 9x - 26 = 0$ egyenletet a $\mathbb{Z}_{19}$ testben. (A megoldáshoz szükségünk lehet a 37. feladatra.)

86. Feladat. A derivált vizsgálatával igazolja, hogy az $x^3 + px + q \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak akkor és csak akkor van többszörös gyöke, ha diszkriminánsa nulla.

87. Feladat.° Oldja meg az $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán. (Segítség: A kubikus rezolvens egyik gyöke $\alpha = 2$.)

88. Feladat.° Határozza meg azt a legalacsonyabb fokszámú f polinomot, amelyre $f(0) = 2$, $f(1) = 3$ és $f(3) = 1$.

89. Feladat. A Horner módszer segítségével számítsa ki az $f(x_0)$ értéket, ha

$$(a)^\circ f = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16, \quad x_0 = 4.$$

$$(b) f = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7, \quad x_0 = -2 - i.$$

90. Feladat.° Állapítsa meg, hogy hányszoros gyöke az

$$(a) x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \text{ polinomnak a } 2;$$

$$(b) x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16 \text{ polinomnak a } -2.$$

91. Feladat. Oldja meg a következő harmadfokú egyenleteket a komplex számok halmazán.

- (a)° $x^3 - 6x + 9 = 0$,
- (b)° $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$,
- (c)° $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0$,
- (d)° $x^3 - 6x + 4 = 0$,
- (e) $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$,
- (f) $x^3 - 6ix + 4(1 - i) = 0$,
- (g) $x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0$.

92. Feladat. Oldja meg a következő negyedfokú egyenleteket a komplex számok halmazán.

- (a) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 = 0$,
- (b) $x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$,
- (c) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$,
- (d) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x - 6 = 0$,
- (e) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$,
- (f) $4x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 2x + 1$.

93. Feladat. Az euklideszi algoritmus segítségével határozzon meg olyan g_1, g_2 polinomokat, amelyekre $f_1g_1 + f_2g_2 = \text{ln. k. o.}(f_1, f_2)$.

- (a) $f_1 = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$, és $f_2 = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$,
- (b) $f_1 = x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 27x^3 + 37x^2 - 35x + 35$, és $f_2 = x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 10x - 25$,
- (c) $f_1 = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$ és $f_2 = x^2 - x + 1$.

94. Feladat. (3 pont) Határozza meg azt a legalacsonyabb fokú polinomot, amely $(x - 1)^2$ -nel osztva $2x$ -et, míg $(x - 2)^3$ -nel osztva $3x$ -et ad maradékul.

95. Feladat. Állapítsa meg, hogy milyen kapcsolat van az $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ egyenlet együtthatói között, ha tudjuk, hogy két gyökének összege megegyezik a másik két gyökének összegével.

96. Feladat. Állapítsa meg, hogy milyen kapcsolat van az $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ egyenlet együtthatói között, ha tudjuk, hogy két gyökének szorzata megegyezik a másik két gyökének szorzatával.

97. Feladat. Igazolja, hogy ha az $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ egyenletre teljesül a 96. feladatban megfogalmazott feltétel, akkor az megoldható x^2 -tel való osztással, majd ezt követően $y = x + \frac{c}{ax}$ helyettesítést végrehajtva.

98. Feladat. A 95. és a 96. feladat eredményét fölhasználva oldja meg az alábbi egyenleteket.

- (a) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 6 = 0$,
- (b) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0$,
- (c) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3 = 0$,
- (c) $x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 4 = 0$.

99. Feladat. Legyen $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Igazolja, hogy pontosan akkor létezik olyan $\alpha \in \mathbb{C}$ komplex szám, amelyre $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$, azaz van a két polinomnak közös gyöke, ha $\ln. k. o.(f, g)$ legalább elsőfokú, és ekkor $x - \alpha \mid \ln. k. o.(f, g)$.

TÖBBHATÁROZATLANOS POLINOMOK

100. Feladat.° Fejezze ki elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként az alábbi polinomokat.

- (a) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$,
- (b) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2x_1x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$,
- (c) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_2^2x_3^2 - 2x_1^2x_3^2$,
- (d) $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$.

101. Feladat. Állítsa elő elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként azt az n határozatlanos szimmetrikus polinomot, amelyet lexikografikusan első tagjával adtunk meg.

- (a) $x_1^3 + \dots$,
- (b) $x_1^2x_2x_3 + \dots$,
- (c) $x_1^2x_2^2 + \dots$.

102. Feladat. A gyökök kiszámítása nélkül adja meg

- (a) az $f = 3x^3 - 5x^2 + 1$ polinom gyökei köbeinek összegét.
- (b) az $x_1^3x_2^3 + \dots$ lexikografikusan első taggal rendelkező négyhatározatlanos polinom helyettesítési értékét, ha $x_1, \dots, x_4$ az $f = 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ polinom gyökei.