

Név:

Összpontszám:

Érdemjegy:

Algebra és számelmélet

Vizsgadolgozat

(2020. 12. 12.)

1. Feladat. (4 · 2 pont)

Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás.

(A) Igaz-e, hogy tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén abból, hogy $\sqrt[n]{z}$ -nek van valós értéke, következik az, hogy z is valós? Ha igen, akkor egy mondatban indokolja, ha nem, akkor adjon ellenpéldát.

(B) Igaz-e, hogy tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ -re, ha z^2 hatodik egységgyök, akkor z is hatodik egységgyök. Igazolja röviden, vagy adjon ellenpéldát.

(C) Van olyan z komplex szám, amelyre $\operatorname{Re} z = 1$, és $|z - i| = 3$.

(D) Tetszőleges $v, w \in \mathbb{C}$ -re $|v + w| = |v| + |w|$.

2. Feladat. (4 · 3 pont)

Igazak-e a következő állítások. **Válaszeit röviden indokolja.**

(A) Ha $n > 2$ egész, akkor $\varphi(n)$ páros.

(B) Ha egy $\mathbb{C}$ fölötti polinom irreducibilis, akkor nincs gyöke.

(C) Az $x^3 + \bar{1}$ polinom irreducibilis a $\mathbb{Z}_3[x]$ polinmggyűrűben.

(D) Az $(x^2 + \bar{1})u \equiv \bar{1} \pmod{m}$ kongruencia nem oldható meg a $\mathbb{Z}_2[x]$ polinmggyűrűben, ahol $m = x^3 + x^2 + \bar{1}$

3. Feladat. (3·3 pont) Igazak-e az alábbi állítások (**válaszát röviden indokolja**).

(A) Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ -re létezik primitív n -edik egységgyök. A különböző n -edik primitív egységgyökök száma $\varphi(n)$.

(B) Létezik olyan integritástartomány, amelyben pontosan hat egység van.

(C) Irreducibilis-e az $x^4 + 16$ polinom a valós számtest fölött?

4. Feladat. ($4 \cdot 3$ pont) Adjon példát és röviden **indokolja** meg, hogy a példája miért rendelkezik a kívánt tulajdonsággal.

(A) Adja meg az összes nem izomorf 7 elemű csoportot.

(B) Adjon meg két olyan különböző a, b természetes számot, amelyekre $\varphi(a) = \varphi(b) = 100$.

(C) Adjon példát olyan $f \in \mathbb{R}[x]$ hatodfokú polinomra, amelyre $f/\text{ln. k. o.}(f, f') = x^4 - 1$.

(D) Adja meg az összes legföljebb harmadfokú irreducibilis polinomot 3 elemű test fölött.

5. Feladat. ($4 \cdot 3$ pont) Egészítse ki a definíciókat, ill. tételkimondásokat.

- (a) A $F[x]/(f)$ maradékosztály-gyűrű akkor és csak akkor zérusosztómentes, ha f F fölött.
- (b) Azt mondjuk, hogy az $f \in F[x]$ polinomnak az $\alpha \in F$ elem , ha $(x - \alpha)^k | f$, de $(x - \alpha)^{k+1} \nmid f$.
- (c) Az A halmazon definiált $\circ$ művelet , ha bármely $a, b \in A$ -ra az $ax = b$, és $ya = b$ egyenletek megoldhatók.
- (d) Az A véges halmazon definiált $\alpha \in S_A$ permutáció fölbontható ciklusok szorzatára. E fölbonthatóság a eltekintve

6. Feladat. (10 pont)

Igazolja, hogy tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{Z}$ egészekre az $ax + by = c$ egyenletnek pontosan akkor van egész megoldása, ha megoldható az $ax \equiv c \pmod{b}$ lineáris kongruencia.

7. Feladat. (9 pont) Egészítse ki a következő tétel bizonyítását.

(Wilson tétele) Ha p prímszám, akkor $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Bizonyítás. Ha $p = 2, 3$, akkor az állítás nyilvánvaló, így föltehető, hogy $p > 3$. Az $\{1, 2, \dots, p-1\}$ számok, így bármely $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ esetén pontosan egy olyan $1 \leq j \leq p-1$ van, amelyre Ez alapján az $\{1, 2, \dots, p-1\}$ halmazbeli számok párokba rendezhetők. Kérdés, hogy minden egyes párban különböző számon vannak. Ha valamely i párja önmaga, akkor teljesül rá az kongruencia, azaz $p \mid i^2 - 1$, és így $p \mid (i-1)(i+1)$. Mivel p prímszám, ez csak akkor teljesül, ha $i \in \{1, p-1\}$. Kaptuk hogy a $2, 3, \dots, p-2$ számok mindegyike különbözik párjától az iménti párosításnál. Ez azt jelenti, hogy, amiből — mindkét oldalt $p-1$ -gyel szorozva — a bizonyítandó állítást kapjuk.

8. Feladat. (10 pont) Igazolja a következő állítást.

Legyen $m \in F[x]$ tetszőleges nemkonstans polinom, és tekintsük az $F[x]/(m)$ maradékosztálygyűrűt. Ha valamely $f \in F[x]$ polinomra $\text{ln. k. o.}(f, m) \sim 1$, akkor bármely $g \in \bar{f}$ polinomra $\text{ln. k. o.}(g, m) \sim 1$.

9. Feladat. (8 pont) Igazolja a következő állítást.

Legyen $m \in F[x]$ tetszőleges nemkonstans polinom. Az $\bar{f} \in F[x]/(m)$ maradékosztálynak pontosan akkor van multiplikatív inverze (pontosan akkor invertálható elem, azaz egység), ha $\text{ln.k.o.}(f, m) \sim 1$. A multiplikatív inverz, ha létezik, egyértelműen meghatározott.

10. Feladat. (10 pont) Egészítse ki a következő tétel bizonyítását.

Tétel. *Tetszőleges G véges csoport és $H \leq G$ részcsoportra $|G| = |H| \cdot |G:H|$. Másképpen mondva, véges csoport bármely részcsoportjának rendje osztója a csoport rendjének.*

Bizonyítás. Legyen G véges csoport és $H \leq G$. Az összes különböző, H szerinti baloldali mellékosztályok G alkotják. Mivel bármely $a \in G$ -re $a \in aH$, ezen állítás igazolására elegendő azt megmutatni, hogy tetszőleges két baloldali mellékosztály vagy, vagy

Legyen $a, b \in G$ olyan, hogy $aH \cap bH \neq \emptyset$. Ha $g \in aH \cap bH$, akkor valamely $h_1, h_2 \in H$ -ra $g = ah_1 = bh_2$. Ebből következik, azaz $b \in aH$. Ez pedig maga után vonja, hogy $bH \subseteq aH$. Mivel a fordított irányú tartalmazás ugyanígy kapható, állításunkat igazoltuk.

Mivel $G = \bigcup(aH : a \in G)$, már csak azt kell igazolni, hogy bármely két H szerinti mellékosztályban van. Ez pedig abból adódik, hogy az $ah \mapsto bh$ hozzárendelés egy $aH \rightarrow bH$ bijektív leképezést definiál.

Beküldési határidő: 2021. január 6.

A beküldés formája: e-mail csatolt fájl a klukovits@math.u-szeged.hu címre, vagy postai úton nevemre, Bolyai Intézet 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.

Értékelés: (az elérhető pontszám: 100)

elégséges: 50 pont,

közepes: 60 pont,

jó: 81 pont,

jeles: 90 pont.