

Bevezetés, komplex számok.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2020. szeptember 19.

Tájékozódó fölmérés 1.

1. Kérdés.

Adja meg a következő fogalmak definícióit a klasszikus számelméletben.

1. Prímszám, fölbonthatatlan szám.
2. Euklideszi algoritmus.
3. Legnagyobb közös osztó.
4. A modulo m kongruencia.

2. Kérdés.

Fogalmazza meg a következő számelméleti tételeket.

1. A számelmélet alaptétele.
2. A kínai maradéktétel.
3. A lineáris kongruenciák megoldhatóságára és a (lényegesen különböző) megoldások számára vonatkozó tétel.

Tájékozódó fölmérés 2.

3. Kérdés.

Adja meg a következő fogalmak definícióit.

1. Leképezés, injektív-, szürjektív- és bijektív leképezés.
2. Permutáció.
3. Ekvivalencia reláció.
4. Osztályozás.
5. Rendezés, rendezett halmaz.
6. Rendezett halmaz minimális-, ill. legkisebb eleme.

4. Kérdés.

Fogalmazza meg a következő tételeket.

1. A véges halmazok permutációinak ciklusokra és transzpozíciókra való fölbonthatására vonatkozó tételek.
2. Egy adott halmaz ekvivalencia relációi és osztályozásai kapcsolatát leíró tétel.

Tájékozódó fölmérés 3.

5. Kérdés.

Adja meg a kétváltozós műveletek legalább 4 tulajdonságát.

6. kérdés.

Adja meg a csoport, a gyűrű és a test definícióját.

7. Kérdés.

Fejezze be a következő állítást úgy, hogy egy igaz tételt kapjunk.

A $\mathbb{Z}_n$ maradékosztály-gyűrű pontosan akkor test, ha ...

Tájékozódó fölmérés 4.

8. Kérdés.

A következő állításokról csak azt kell eldöntenie, hogy igazak, vagy hamisak.

1. Létezik olyan fölbonthatatlan egész szám, amely nem prímszám.
2. Bármely két egész számnak van legnagyobb közös osztója.
3. Az $x \equiv 1 \pmod{4}$, $x \equiv 1 \pmod{32}$ lineáris kongruenciarendszernek nincs megoldása.
4. Legyenek $\varphi: A \rightarrow B$ és $\psi: B \rightarrow C$ leképezések.
 - Ha $\varphi\psi$ injektív, akkor ψ is injektív.
 - Ha $\varphi\psi$ szürjektív, akkor ψ is szürjektív.
5. Ha A véges halmaz, akkor minden $\varphi: A \rightarrow A$ szürjektív leképezés injektív is.
6. Ha A végtelen halmaz, akkor van olyan $\varphi: A \rightarrow A$ injektív leképezés, amely nem szürjektív.

A számfogalom fölépítése.

1. **Természetes számok:** $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
Peano axiómái.
2. **Egész számok:** $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$
 $\mathbb{Z} \equiv \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$, $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a - b = c - d$;
Természetes számok „különbségei”.
3. **Racionális számok:**
 $\mathbb{Q} \equiv \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) / \sim$, $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
Egész számok „hányadosai”.
 - A racionális számok már testet alkotnak, de ez a test egyrészt nem tartalmazza minden konvergens sorozatának határértékét, másrészt nem algebrailag zárt.
4. **Valós számok:** Racionális számokból álló konvergens sorozatok osztályai.
5. A valós számok $\mathbb{R}$ teste már tartalmazza a konvergens sorozatok határértékét (teljes metrikus tér), DE algebrailag nem zárt.

A komplex számok teste.

A konstrukció.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ -n műveleteket definiálunk: $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$,
- $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Tételek.

1. A $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmaz az előbbi két művelettel test: a **komplex számok teste**.
2. E test tekinthető a valós számok teste bővítésének: a $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $a \mapsto (a, 0)$ leképezés injektív.
3. Egyszerű számolással kaphatók a következők:
 - $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$
 - $(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b)$
 - $-(a, b) = (-a, -b)$.

Kanonikus alak 1.

1. Az $(a, 0)$ komplex számot azonosíthatjuk az a valós számmal.
2. Tetszőleges $(a, b) \in \mathbb{C}$ -re
$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1),$$
3. így (a, b) komplex szám helyett írhatunk $a + bi$ -t, ahol „ i ” olyan szimbólum, amelyre $i^2 = -1$, ugyanis $(0, 1)^2 = (-1, 0)$.
4. Ez utóbbi a komplex szám **kanonikus alakja**.
5. A számolás velük, mint kéttagú algebrai kifejezésekkel:

$$\begin{aligned} a + bi = c + di &\iff a = c, b = d \\ (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\ -(a + bi) &= (-a) + (-b)i \\ (a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i \\ \frac{1}{a + bi} &= \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i, \quad (a^2 + b^2 \neq 0) \end{aligned}$$

Kanonikus alak 2.

- A $z = a + bi$ komplex szám **valós- ill. képzetes része** az a , ill b valós szám. Jelölése: $\operatorname{Re}(z) = a$, $\operatorname{Im}(z) = b$.
- Legyen $n > 1$ természetes szám, és z egy komplex szám. Azt mondjuk, hogy az **u komplex szám a z egy n -edik gyöke**, ha $u^n = z$.
- Kanonikus alakban csak a négyzetgyökök határozhatók meg:
- Ha $z = a + bi \neq 0$, akkor olyan $u = x + yi$ komplex számokat kell meghatározni, amelyekre $(x + yi)^2 = a + bi$. Az $x, y \in \mathbb{R}$ valós számok megoldásai az

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= a \\ 2xy &= b\end{aligned}$$

egyenletrendszernek.

- Két megoldás van, egymás -1 -szeresei.

Példák 1.

Igazoljuk, hogy a négyzetgyökvonás mindig elvégezhető kanonikus alakban.

- Az előbbiek alapján azt kell megmutatni, hogy az

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= a \\ 2xy &= b\end{aligned}$$

egyenletrendszernek mindig van valós megoldása.

- Föltehető, hogy a, b egyike sem zéró.
- y -t eliminálva:

$$\begin{aligned}4x^4 - 4ax^2 - b^2 &= 0, \\ x^2 &= \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.\end{aligned}$$

- Lévéen $a + \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ és $a - \sqrt{a^2 + b^2} < 0$,
- x^2 -re egy pozitív értéket kapunk.

Geometriai reprezentáció 1.

- $z = a + bi$ -nek az (a, b) pont felel meg, valós-, ill képzetes tengely;
- az (a, b) tükörképe az valós tengelyre az $(a, -b)$ pont, ez az $\bar{z} = a - bi$ komplex számnak felel meg, z **konjugáltja**.
- $z = a + bi$ abszolút értéke az (a, b) pontba mutató helyvektor hossza: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Tetszőleges $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ komplex számokra, ha $z_2 \neq 0$, akkor

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}.$$

- Érvényes a háromszög egyenlőtlenség.

Polárkoordinás reprezentáció.

- Nemzéró komplex szám argumentuma: egy $0 \leq \varphi < 2\pi$ valós szám, $\arg z$.
- $z \in \mathbb{C}$ -re $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, ahol $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. **Trigonometrikus alak.**
- Ebben az alakban könnyű szorozni (hatványozni) és osztani, de nem lehet használhatóan összeadni.

Lemma

Tetszőleges $z, u \in \mathbb{C}$ nemzéró komplex számokra $\arg(zu) = \arg z + \arg u$, és $\arg \frac{z}{u} = \arg z - \arg u$.

Gyökvonás.

- Legyen $n > 1$ természetes szám,
 $z, u \in \mathbb{C}$, $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $u = s(\cos \psi + i \sin \psi)$ olyan
komplex számok, hogy $u^n = z$,
- $r = s^n$ és $n\psi = \varphi + 2k\pi$ valamilyen $k \in \mathbb{Z}$ -re.
- $s = \sqrt[n]{r}$, és $\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $u_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$
- Tetszőleges $k \in \mathbb{Z}$ -re $u_k^n = z$, azaz z n -edik gyöke, de nem
mind különbözők.
- $u_k = u_l$ pontosan akkor teljesül, ha $n | k - l$.

Theorem

*Egy nemzérő komplex számnak pontosan n számú különböző
 n -edik gyöke van bármely $n > 1$ természetes számra.*

Egységgyökök.

Definition

Azon komplex számokat, amelyek n -edik hatványa valamely $n > 1$
természetes számra 1, **n -edik egységgyököknek** nevezzük.

$$\varepsilon_{n,k} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, 0 \leq k < n$$

Ezek a számsíkon az egységkörön helyezkednek el. Rögzített n -re
az $(1, 0)$ ponttól indulva egy szabályos n -szög csúcspontjaiban.

Észrevételek.

- Tetszőleges $0 \leq k, l < n$ -re $\varepsilon_{n,1}^k = \varepsilon_{n,1}^l$ maga után vonja, hogy
 $k = l$, azaz $\varepsilon_{n,1}$ -nek pontosan n számú különböző hatványa
van, amelyek kiadják az összes különböző n -edik
egységgyököket.
- Ilyen tulajdonságú egységgyökök több is van, például $\varepsilon_{n,n-1}$.

Egységgyökök.

Definition

Azt mondjuk, hogy az ε n -edik egységgyökök **primitív n -edik
egységgyökök**, ha pontosan n számú különböző egész kitevős
hatványa van. Másképpen mondva, egész kitevős hatványaként az
összes n -edik egységgyökök előáll..

Theorem

Az $\varepsilon_{n,k} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ komplex szám akkor és csak akkor
primitív n -edik egységgyök, ha $\text{ln. k. o.}(n, k) = 1$.

Corollary

*Tetszőleges $n > 1$ természetes számra létezik primitív n -edik
egységgyökök, mégpedig annyi, ahány n -hez relatív prím szám van az
 $1, 2, \dots, n$ egészek között (azaz számuk $\varphi(n)$, ahol φ az ún.
Euler-függvény, amelynek pontos definícióját később adjuk meg).*

Egységgyökök.

Corollary

*Legyen $n > 1$ természetes szám. Tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ komplex szám
összes különböző n -edik gyöke felírható $u\varepsilon_1, \dots, u\varepsilon_n$ alakban, ahol
 $u^n = z$, és $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ az összes különböző n -edik egységgyökök, illetve
 $u\varepsilon^k$, $0 \leq k < n$ alakban, ahol ε egy primitív n -edik egységgyök.*

Theorem

Rögzített $n \in \mathbb{N}$ természetes számra az összes n -edik egységgyökök
 U_n halmaza csoport a komplex számok ismert szorzás műveletével.

Theorem

Az $U = \bigcup (U_n : n \in \mathbb{N})$, az összes egységgyökök halmaza, csoport a
komplex számok ismert szorzás műveletével.