

Feladatok
az Algebra és számelmélet
kurzushoz.
2019-20. I. félév

1. KOMPLEX SZÁMOK.

1. Feladat. Hol helyezkednek el a számsíkon azon $z \in \mathbb{C}$ komplex számok, amelyekre

- (1) $\operatorname{Re} z = a (a \in \mathbb{R})$, ill. $\operatorname{Im} z = b (b \in \mathbb{R})$;
- (2) $\arg z = \alpha$ ($0 < \alpha < 2\pi$),
- (3) $|z| = 2$, ill. $|z - 2 + i| < \sqrt{3}$,
- (4) $|\bar{z} - i| \leq 1$,
- (5) $0 \leq \arg(zi) < \pi/3$,
- (6) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \geq 1$ (2 pont).

2. Feladat. Ábrázolja a számsíkon az alábbi számhalmazokat.

- (1) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(\bar{z} - i) > 1\}$, $\{z \in \mathbb{C} : |iz - i| = 0\}$
- (2) $\{z \in \mathbb{C} : |\bar{2} + 2 - i| \leq 2\}$
- (3) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2 + i| = 3\}$

3. Feladat. Legyen $u = 2 - 3i$, $v = 1 + i \in \mathbb{C}$. Számítsa ki az alábbi komplex számokat.

$$u + \bar{v} + \bar{u}v, \quad \frac{\bar{u}}{v} + \frac{u}{\bar{v}}, \quad |uv|, \quad \left| \frac{u}{v} \right|.$$

4. Feladat. Számítsa ki mind trigonometrikus, mind kanonikus alakban a következő komplex számokat.

- (1) $\frac{1-i}{1+i}$, $\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$,
- (2) $\frac{(-1-i)(\sqrt{3}+i)}{(-1+i)(-\sqrt{3}+i)}$,
- (3) $(\sqrt{3} - i)(2 + 2\sqrt{3}i)$.

5. Feladat. Számítsa ki az alábbi hatványokat trigonometrikus alakban, majd adja meg a végeredményt kanonikus alakban is.

$$(1 + i)^{2422}, \quad (\sqrt{3} + i)^{1208}, \quad (-1 + i)^{1222}.$$

6. Feladat. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy két komplex szám összege, ill. szorzata valós szám legyen?

7. Feladat. Adja meg kanonikus alakban a következő komplex számokat:

$$\left(\frac{i-1}{2+i}\right)^2, \quad \frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}, \quad \frac{(1+i)^7}{(1-i)^5}, \quad \frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}, \text{ ahol } n \in \mathbb{N}.$$

8. Feladat. Határozza meg azon kanonikus alakú z komplex számokat, amelyekre

$$(a) (1-i)\bar{z} - 3iz = 2 - i,$$

- (b) $z\bar{z} + 3(z + \bar{z}) = 7$,
 (c) $(2 + i)x^2 + (5 - i)x + (2 - 2i) = 0$

9. Feladat. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} ix + (1 + i)y &= 3 - i \\ (1 - i)x - (6 - i)y &= 4. \end{aligned}$$

10. Feladat. Melyek azok a (kanonikus alakú) z komplex számok, amelyekre

$$z^2 = 3 + 4i, \quad z^2 = 8 - 6i, \quad z^4 = -16.$$

11. Feladat. Határozza meg azokat a kanonikus alakú komplex számokat, amelyek négyzete rendre

$$2i, -8i, 3 - 4i, -15 + 8i, 8 + 6i, 8 - 6i, -8 - 6i, 1 - i\sqrt{3}.$$

12. Feladat. Határozza meg $n = 2, 3, 4, 6$ -ra az n -edik egységgyököket, s adja meg őket kanonikus alakban is. Melyek közülük primitív egységgyökök?

13. Feladat. Határozza meg rögzített n -re az összes n -edik egységgyök összegét, ill. szorzatát.

14. Feladat. Legyen α $2n$ -edik primitív egységgyök. Számítsa ki az $1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1}$ összeget.

15. Feladat. Legyen $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Számítsa ki az alábbi komplex számokat.

- (a) $(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$,
 (b) $(a + b)(a + b\omega)(a + b\omega^2)$,

ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$.

16. Feladat. Trigonometrikus alakban számolva számítsa ki a $(\sqrt{3} - i)(2 + 2\sqrt{3}i)$ komplex számot. (A végeredményt adja meg kanonikus alakban is.)

17. Feladat. Trigonometrikus alakban számolva számítsa ki az alábbi komplex szám értékét. (A végeredményt adja meg kanonikus alakban is.)

$$\frac{(-1 + i)^{2422}}{(\sqrt{3} + i)^{1208}}$$

18. Feladat. Oldja meg a $z^2 + 4\bar{z} = |z|^2 + 6$ egyenletet a komplex számok halmazán.

19. Feladat. Oldja meg az $i\bar{z} = z^2$ egyenletet a komplex számok halmazán.

20. Feladat. Számítsa ki $\sqrt[4]{-1 - \sqrt{3}i}$ mind a négy értékét. (A végeredményt adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban is.)

21. Feladat. Számítsa ki $\sqrt[3]{i}$ mindhárom értékét. (A végeredményt adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban is.)

22. Feladat. Egységgyök-e a $z = \cos \frac{5\pi}{12} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{12}$ komplex szám? Ha igen, akkor határozza meg mindazokat az n kitevőket, amelyekre z n -edik egységgyök, valamint azt az n természetes számot, amelyre z primitív n -edik egységgyök.

23. Feladat. Határozza meg mindazokat a komplex számokat, amelyek huszonnegyedik és századik egységgyökök is.

24. Feladat. Számítsa ki a gyök összes értékét trigonometrikus alakban, majd adja meg a végeredményeket kanonikus alakban is.

$$\sqrt[4]{i}, \quad \sqrt[4]{-1 - \sqrt{3}i}, \quad \sqrt[6]{64}, \quad \sqrt[4]{-16}, \quad \sqrt[3]{-8}.$$

25. Feladat. Mikor lehet ε és $\varepsilon + 1$ is egységgyök?

26. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e a következő állítások. Válaszát röviden indokolja is meg.

- (1) Van olyan z komplex szám, amelyre $\operatorname{Re} z = 1$, és $|z - i| = 3$.
- (2) Tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $\sqrt[n]{z}$ értékei között van valós szám, akkor zis valós.
- (3) Tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ esetén, ha z^2 harmadik egységgyök, akkor z szintén harmadik egységgyök.
- (4) Tetszőleges $v, w \in \mathbb{C}$ -re $|v + w| = |v| + |w|$.
- (5) Van olyan z komplex szám, amelyre $\operatorname{Re} z = 2$, és $|z| = 1$.

2. GYŰRŰK ÉS TESTEK.

27. Feladat. Legyen A nemüres halmaz.

- (a) Mutassa meg, hogy a $(\mathcal{P}(A); \Delta, \cap)$ algebra egységelemes kommutatív gyűrű.
- (b) Igazolja, hogy tetszőleges $B, C \in \mathcal{P}(A)$ -re megoldható a $B \Delta X = C$ egyenlet.

28. Feladat. Legyen $H = \{0, 1, 2, 3\}$, és definiáljuk a következő két műveletet:

$+$	0	1	2	3	$\cdot$	0	1	2	3
0	0	1	2	3	0	0	0	0	0
1	1	2	3	0	1	0	1	2	3
2	2	3	0	1	2	0	2	0	2
3	3	0	1	2	3	0	3	2	1

Mutassa meg, hogy H e két művelettel egységelemes kommutatív gyűrű,

29. Feladat. Definiáljuk a következő két műveletet a $T = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ halmazon:

+	0	1	2	3	4	·	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	0	1	0	1	2	3	4
2	2	3	4	0	1	2	0	2	4	1	3
3	3	4	0	1	2	3	0	3	1	4	2
4	4	0	1	2	3	4	0	4	3	2	1

Igazolja, hogy a T e két művelettel test. [E testet általában $\mathbf{GF}(5)$ -tel szokás jelölni.]

30. Feladat. Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e az alábbi halmaz (a szokásos összeadással és szorzással)?

$$\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}, a \text{ páros}\}$$

31. Feladat. Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e az alábbi halmaz (a szokásos összeadással és szorzással)

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

32. Feladat. Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e az alábbi halmaz (az ún. Euler-egészek) a komplex számok szokásos összeadással és szorzásával?

$$\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega : a, b \in \mathbb{Z}\} \quad \omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

33. Feladat. Mutassa meg, hogy tetszőleges nemüres $S \subseteq \mathbb{R}$ esetén ekvivalens az alábbi két föltétel.

- (1) $\forall a, b \in S : a + b \in S$ és $-a \in S$
- (2) $\forall a, b \in S : a - b \in S$

34. Feladat. Határozza meg a $\mathbb{Z}[\omega]$ gyűrű egységeit (lásd 32. feladatot).

35. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások. A válaszokat minden esetben indokolnia kell.

- (1) Létezik olyan gyűrű, amely egységelemes, de nem kommutatív és nem is zérusosztómentes.
- (2) Létezik olyan integritástartomány, amelyben pontosan 30 egység van.
- (3) Az egységek minden gyűrűben csoportot alkotnak az összeadás műveletével.
- (4) Létezik olyan gyűrű, amely kommutatív és egységelemes, de nem integritástartomány.
- (5) Létezik olyan integritástartomány, amelyben csak véges sok egység van.

36. Feladat. Keressen egy ± 1 -től különböző egységet a $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ gyűrűben, majd ennek segítségével konstruáljon meg végtelen sok egységet.

37. Feladat. Határozza meg a véges tizedestörtek gyűrűjének egységeit.

38. Feladat. Definiáljunk egy újfajta összeadást és egy újfajta szorzást a valós számok halmazán: legyen $a \oplus b = a + b - 1$ és $a \odot b = a + b - ab$. Igazolja, hogy az $(\mathbb{R}; \oplus, \odot)$ struktúra test.

39. Feladat. Adja meg a $\mathbb{Z}_3$ és a $\mathbb{Z}_5$ testek művelet tábláit.

40. Feladat. Legyenek $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ nemzéró Gauss egészek. Igazolja, hogy léteznek olyan $\gamma, \delta \in \mathbb{Z}[i]$ Gauss egészek, amelyekre $\alpha = \beta\gamma + \delta$, és $|\delta|^2 < |\beta|^2$. (Azaz a $\mathbb{Z}[i]$ gyűrűben létezik ún. maradékos osztás.)

3. KLASSZIKUS SZÁMELMÉLET.

41. Feladat. Határozza meg, hogy mennyi maradékot ad 247^{244} 23-mal osztva, valamint 4444^{4444} 9-cel osztva.

42. Feladat. Határozza meg 2^{100} utolsó két, továbbá 7^{999} utolsó három számjegyét.

43. Feladat. Oldja meg az alábbi lineáris kongruenciarendszereket.

(1)

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{4} \\ x &\equiv 1 \pmod{9} \\ x &\equiv 5 \pmod{11} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{7} \\ x &\equiv 5 \pmod{10} \\ x &\equiv 4 \pmod{11} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{5} \\ x &\equiv 5 \pmod{7} \\ x &\equiv 4 \pmod{12} \\ x &\equiv 7 \pmod{13} \end{aligned}$$

44. Feladat. Wilson tételét fölhasználva adja meg, hogy

- (1) milyen maradékot ad $15!$, ha 17-tel osztjuk;
- (2) milyen maradékot ad $2(26!)$, ha 29-cel osztjuk?

45. Feladat. Egy természetes számról annyit tudunk, hogy két prímosztója van, osztóinak száma 6, és osztóinak összege 26. Melyik ez a szám?

46. Feladat. Mutassa meg, hogy

- (1) $n \geq 1$ esetén $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$.
- (2) $\tau(n)$ pontosan akkor páratlan, ha n teljes négyzet.
- (3) $\sigma(n)$ pontosan akkor páratlan, ha n teljes négyzet, vagy egy teljes négyzet kétszerese.

47. Feladat. Igazolja, hogy $\varphi(n)$ pontosan akkor páratlan, ha $n = 1, 2$

48. Feladat. Igazolja, hogy ha az f nem azonosan zéró számlméleti függvény gyengén multiplikatív, akkor $f(1) = 1$.

4. TEST FÖLÖTTI EGYHATÁROZATLANOS POLINOMOK.

49. Feladat. Szorozza össze az alábbi két polinomot (vagyis adja meg tetszőleges n -re x^n együtthatóját az fg polinomban).

$$f = x^{100} + x^{99} + \dots + x^2 + x + 1$$

$$g = 100x^{100} + 99x^{99} + \dots + 2x^2 + x$$

50. Feladat. Végezzen maradékos osztást az $f = x^3 + \bar{1}$, $g = \bar{2}x^2 - \bar{3}x + \bar{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$ polinomokon.

51. Feladat. Határozza meg az alábbi polinomok legnagyobb közös osztóját. Az (a)-(d)-beli polinomok $\mathbb{R}$ fölöttiek, míg az (e)-beliek $\mathbb{Z}_2$ fölöttiek.

- (a) $f = x^3 - 3x + 2$ és $g = x^3 - 2x^2 - x + 2$.
- (b) $f = x^4 - 1$ és $g = x^5 + 2x^3 + x^2 + x + 1$.
- (c) $f = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3$ és $g = x^3 + x^2 + x - 3$.
- (d) $f = x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 3$ és $g = x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 6$.
- (e) $f = x^4 + x^3 + x$ és $g = x^4 + x^2 + x$.

52. Feladat. Oldja meg az $fu + gv = \text{ln. k. o.}(f, g)$ egyenletet.

- (a) $f = x^8 - 3x + 2$, $g = x^6 - x^5 + 3x - 2 \in \mathbb{R}[x]$.
- (b) $f = x^5 + x + \bar{2}$, $g = x^4 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$.
- (c) $f = x^6 + \bar{6}$, $g = x^4 + \bar{5}x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_7[x]$.

53. Feladat. Végezzen maradékos osztást az $f = x^3 + \bar{1}$, $g = \bar{2}x^2 - \bar{3}x + \bar{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$ polinomokon.

54. Feladat. Oldja meg az $fu \equiv \bar{1} \pmod{m}$ kongruenciát, ha

- (a) $f = x^2 + \bar{1}$, $m = x^3 + x^2 + \bar{1}$,
- (b) $f = \bar{3}x^2 + \bar{2}$, $m = x^3 + x + \bar{1}$.

55. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások. Válaszát minden esetben indokolja meg.

- (a) Minden $f, g \in \mathbb{Z}_2[x]$ -re, $f|g$ és $g|f$ maga után vonja, hogy $f = g$.
- (b) Létezik olyan $f \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinom, amelynek végtelen sok osztója van (ebben a gyűrűben).
- (c) Minden $f, g \in \mathbb{Z}_3[x]$ -re, $f|g$ és $g|f$ maga után vonja, hogy $f = g$.
- (d) Léteznek olyan $f \neq g \in \mathbb{Z}_3[x]$ polinomok, amelyekre minden $c \in \mathbb{Z}_3$ -ra $f(c) = g(c)$.
- (e) Létezik olyan $f \in \mathbb{R}[x]$ polinom, hogy $\ln. k. o.(f, x^3 - 1) = x + 1$.

56. Feladat. Határozza meg a $g = x^2 + \sqrt{2}x + 1$ polinom gyökeit, majd Bézout tételének segítségével vizsgálja meg, hogy ezen g polinom osztja-e az $f = x^4 + 1$ polinomot.

57. Feladat. Mely n pozitív egészekre osztható az $x^n + 1$ polinom az $x^2 + 1$ polinommal?

58. Feladat. Határozza meg az összes olyan p prímszámot, amelyre

$$x^2 + \overline{1}|x^{2008} - \overline{23}x^{1922} + \overline{13}x^{600} + \overline{8}$$

teljesül a $\mathbb{Z}_p[x]$ polinomgyűrűben.

59. Feladat. Igazolja, hogy $x^2 + x + 1$ akkor és csak akkor osztója az $x^{2n} + x^n + 1$ polinomnak, ha n nem osztható 3-mal.

60. Feladat. Határozza meg az összes olyan p prímszámot, amelyre

$$x^2 + \overline{1}|x^{2008} - \overline{23}x^{1922} + \overline{13}x^{600} + \overline{8}$$

teljesül a $\mathbb{Z}_p[x]$ polinomgyűrűben.

61. Feladat. Oldja meg az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűben az

$$x^2 \cdot f \equiv x^2 - 2x \pmod{x^3 + x}$$

kongruenciát. (Figyelem: nem x az ismeretlen, hanem f !)

62. Feladat. Írja föl a $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ négyelemű test összeadó- és szorzótbláját.

63. Feladat. Határozza meg a $\mathbb{Z}_3[x]/(z^2 + 1)$ kilencelemű testben az $a \cdot b$, a/b , b/a elemeket, ahol $a = \overline{x}$ és $b = \overline{x + 1}$.

64. Feladat. Határozza meg a $\mathbb{Z}_5[x]/(x^3 + 1)$ százhuszonöt elemű testben a $2x^2 - 3x + 2$ elem reciprokát.

5. POLINOMFÜGGVÉNYEK, GYÖKÖK, INTERPOLÁCIÓ.

65. Feladat. Legyen $f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós nemkonstans polinom, továbbá a p, q relatív prím egészek olyanok, hogy $f(\frac{p}{q}) = 0$. Igazoljuk hogy $q|a_n$ és $p|a_0$.

66. Feladat. Bezout-tétele segítségével vizsgálja meg, hogy

- (1) osztója-e a $g = x^2 + \sqrt{2}x + 1$ polinom az $f = x^4 + 1$ polinomnak;
- (2) teljesül-e a $g|f$ oszthatóság a
 $g = x^2 - 1$ és $f = x^{17} - x^{16} + x^{15} - x^{14} + x^7 - x^3 + x - 1$
 polinomokra a $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_3$, ill. a $\mathbb{Z}_7$ testek fölött?

67. Feladat. Oldja meg a következő harmadfokú egyenleteket.

- (1) $x^3 - 6x + 9 = 0$,
- (2) $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$.
- (3) $x^3 - 6x^2 - 7x + 60 = 0$.
- (4) $x^3 + 6x + 2 = 0$.
- (5) $x^3 + 3x - 2i = 0$.
- (6) $x^3 - 6ix + 4(1 - i) = 0$,

68. Feladat. Oldja meg a következő negyedfokú egyenleteket.

- (1) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 = 0$.
- (2) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$
- (3) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$.
- (4) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x - 6 = 0$,
- (5) $4x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$.