

Név:

Összpontszám:

Algebra és számelmélet

1. zárthelyi megoldása.

(2019. 11. 12.)

1. Feladat. (4 pont)

(A) Igaz-e, hogy tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén abból, hogy $\sqrt[n]{z}$ -nek van valós értéke következik az, hogy z is valós? Ha igen, akkor egy mondatban indokolja, ha nem, akkor adjon ellenpéldát.

(M) **Igaz**, mert $\mathbb{R}$ zárt a szorzásra.

(B) Igaz-e, hogy tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ -re, ha z^2 hatodik egységgyök, akkor z is hatodik egységgyök. Igazolja röviden, vagy adjon ellenpéldát.

(M) **Hamis**, ellenpélda bármelyik 12. primitív egységgyök.

(C) Van olyan z komplex szám, amelyre $\operatorname{Re} z = 1$, és $|z - i| = 3$.

(M) **Igaz**. A második föltétel szerint a z -nek megfelelő pont a $(0, 1)$ pont körüli 3 sugarú körön van, és ennek van közös pontja a $x = 1$ egyenletű egyenessel.

(D) Tetszőleges $v, w \in \mathbb{C}$ -re $|v + w| = |v| + |w|$.

(M) **Hamis**, például a $v = 1$, $w = -1$ komplex számokra nem teljesül az egyenlőség.

2. Feladat. (4 pont)

Adja meg kanonikus alakban a következő gyökvonások eredményét:

$$\sqrt[3]{2 + 2i} \qquad \sqrt[6]{-27}.$$

Megoldás. A $\sqrt[3]{-2 + 2i}$ értékei:

$$-1 + i, \quad \frac{1 - \sqrt{3}}{2} - i\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1 + \sqrt{3}}{2} - i\frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$$

A $\sqrt[6]{-27}$ értékei:

$$\pm\sqrt{3}i, \quad \mp\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Feladat. (4 pont)

Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások. A válaszokat minden esetben indokolnia kell.

(A) Létezik olyan gyűrű, amely egységelemes, de nem kommutatív és nem is zérusosztómentes.

(M) **Igaz**. Például bármely test fölötti $n \times n$ teljes mátrixgyűrű ilyen tulajdonságú, ha $n > 1$.

(B) Létezik olyan integritástartomány, amelyben pontosan 30 egység van.

(M) **Igaz**, például a $\mathbb{Z}_{31}$ maradékosztálytest.

(C) Az egységek minden gyűrűben csoportot alkotnak az összeadás műveletével.

(M) **Hamis**, például a $\mathbb{Z}_6$ gyűrűben az 1, 5 egységek (invertálható elemek), de $1 + 5 = 0$, amely nyilván nem invertálható.

(D) Létezik olyan gyűrű, amely kommutatív és egységelemes, de nem integritástartomány.

(M) **Igaz**, például a $\mathbb{Z}_4$ gyűrű.

4. Feladat. (4 pont)

Határozza meg, hogy mennyi maradékot ad 247^{244} 23-mal osztva, valamint 4444^{4444} 9-cel osztva.

Megoldás. Az Euler-Fermat tételt alkalmazzuk.

$$247^{244} \equiv 17^{244} = ((17)^{22})^{11} \cdot 17^2 \equiv 1 \cdot 17^2 \equiv 289 \equiv 13 \pmod{23}$$

$$4444^{4444} \equiv (-2)^{4444} = 2^{4444} = (2^6)^{740} \cdot 2^4 \equiv 2^4 \equiv 7 \pmod{9}$$

5. Feladat. (4 pont)

Oldja meg az $fu + gv = \ln.$ k. o. (f, g) egyenletet.

(A) $f = x^8 - 3x + 2, g = x^6 - x^5 + 3x - 2 \in \mathbb{R}[x].$

(B) $f = x^5 + x + \bar{2}, g = x^4 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[x].$

Megjegyzés. Az (A) rész meglehetősen hosszú számolást igényel. A legnagyobb közös osztó meghatározása is asszociáltra áttérést igényel (a nem egész együtthatók elkerülése érdekében), ami a további számolást tovább nehezíti. Ezért e feladatrészt lényegében töröltem. A legnagyobb közös osztó egyébként $x^3 + x - 1$ -nek vehető. A (B) rész ehhez képest rendkívül egyszerű és rövid számolást igényelt. Az (A) rész kompenzálásáról később döntök, de ha valaki a legnagyobb közös osztóig eljutott, akkor megkapta a feladatrésztért járó 2 pontot.

A (B) rész megoldása (a fölülvonásokat nem írom ki).

$$f = gx + (x^3 + x^2 + 2)$$

$$g = (x^3 + x^2 + 2)(x + 2) + 0$$

tehát: $\ln. \text{ k. o. } (f, g) = x^3 + x^2 + 2$, és így $f + g(2x) = x^3 + x^2 + 2$.