

Algebra és Számelmélet gyakorló feladatok

2018-19. 1. félév

Ha a megadott kérdésekre igenlő a válasza, akkor adjon meg egy példát (ill. rövid indoklást), ha nemleges, akkor adjon ellenpéldát, vagy indokolja meg válaszát.

1. Kérdés. Van-e olyan z komplex szám, amelyre $\Re z = 1$, és $|z - i| = 3$?

2. Kérdés. Léteznek-e olyan z, w komplex számok, amelyekre $|z+w| = |z| + |w|$?

3. Kérdés. Igaz-e tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $\sqrt{n}z$ -nek van valós értéke, akkor z is valós szám?

4. Kérdés. Igaz-e, hogy ha z primitív nyolcadik egységgyök, akkor z^{2018} is primitív nyolcadik egységgyök? Mi a helyzet, ha a kitevő 2019?

5. Kérdés. Igaz-e, hogy ha z primitív 12-edik egységgyök, akkor $z^6 = -1$?

6. Kérdés. Igaz-e, hogy tetszőleges R gyűrű és $a, b \in R$ esetén $-(ab) = (-a)b$?

7. Kérdés. Igaz-e, hogy minden egységelemes gyűrűben $1 + 1 \neq 0$? (Itt 1, ill. 0 a multiplikatív, ill. additív egységelemet jelöli.)

8. Kérdés. Igaz-e, hogy minden integritástartomány test?

9. Kérdés. Van-e olyan egységelemes gyűrű, amelyben végtelen sok egység van?

10. Kérdés. A $\mathbb{Z}_{23}$ és $\mathbb{Z}_{24}$ gyűrűk közül melyikben van zérusosztó?

11. Kérdés. Létezik-e olyan $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinom, amelynek $\sqrt{2}$ kétszeres gyöke?

12. Kérdés. Létezik-e olyan valós együtthatós polinom, amelynek i gyöke, de $-i$ nem?

13. Kérdés. Létezik-e olyan ötödfokú valós együtthatós polinom, amelynek pontosan 3 (nem valós) komplex gyöke van?

14. Kérdés. Létezik-e olyan $f \in \mathbb{R}[x]$ ötödfokú polinom, amelynek 6 komplex gyöke van?

15. Kérdés. Igaz-e, hogy ha az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak nincs valós gyöke, akkor konstans polinom?

16. Kérdés. Igaz-e, hogy ha $f \in \mathbb{C}[x]$ irreducibilis $\mathbb{C}$ fölött, akkor $\mathbb{R}$ fölött is az?

17. Kérdés. Létezik-e olyan 2018-adfokú polinom, amely irreducibilis $\mathbb{R}$ fölött? És $\mathbb{Q}$ fölött?

18. Kérdés. Létezik-e olyan $\mathbb{R}$ fölött irreducibilis polinom, amelynek van valós gyöke?

19. Kérdés. Létezik-e negyedfokú irreducibilis polinom a $\mathbb{Z}_2$ mtest fölött?

20. Kérdés. Igaz-e, hogy minden $f, g \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinomra, ha $f|g$ és $g|f$, akkor $f = g$?

21. Kérdés. Létezik-e olyan $f \in \mathbb{R}[x]$ polinom, hogy $\text{ln. k. o.}(f, x^3 - 1) = x - 1$?

22. Kérdés. Igaz-e, hogy minden $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak végtelen sok osztója van?

23. Kérdés. Léteznek-e olyan $f \neq g \in \mathbb{R}[x]$ polinomok, hogy minden $c \in \mathbb{R}$ -re $f(c) = g(c)$?

24. Kérdés. Igaz-e minden $f \in \mathbb{Q}[x]$ legalább másodfokú polinomra, hogy ha f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, akkor nincs valós gyöke?