

Név:

Összpontszám:

Algebra és számelmélet

2. zárthelyi megoldása

(2018. 11. 24.)

1. Feladat. (4 pont)

Igazak-e a következő állítások. Válaszait röviden indokolja.

(A) Ha $n > 2$ egész, akkor $\varphi(n)$ páros.

(M) **Igaz.** A függvény gyenge multiplikatívítása miatt, ha $n = \prod p^{k_i}$ (p_i prím), akkor a $\varphi(n) = \prod (p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1})$ szorzatban csak akkor nincs páros tényező, ha $n = 2$, de ezt kizártuk.

(B) Az $x^3 + \bar{1}$ polinom irreducibilis a $\mathbb{Z}_3[x]$ polinomgyűrűben.

(M) **Hamis,** ugyanis $x^3 + \bar{1} = (x + \bar{1})^3$ a $\mathbb{Z}_3[x]$ polinomgyűrűben.

(C) Az $(x^2 + \bar{1})u \equiv \bar{1} \pmod{m}$ kongruencia nem oldható meg a $\mathbb{Z}_2[x]$ polinomgyűrűben, ahol $m = x^3 + x^2 + \bar{1}$

(M) **Hamis,** ugyanis ln. k. o. $(x^2 + \bar{1}, x^3 + x^2 + \bar{1}) = \bar{1}$.

2. Feladat. (4 pont)

Határozzon meg olyan $u, v \in \mathbb{R}[x]$ polinomokat, amelyekre $fu + gv =$ ln. k. o. (f, g) , ha

$$f = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1, \text{ és } g = x^4 + 2x^3 + x + 2.$$

(M) $f(-1) + g(x+1) = x^3 + 1$.

3. Feladat. (4 pont)

Oldja meg az $fu + gv = \bar{1}$ egyenletet a $\mathbb{Z}_5[x]$ polinomgyűrűben, ahol

$$f = x^2 + \bar{3}x + \bar{1} \quad \text{és} \quad g = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{4}x + \bar{2}.$$

(M) $f(x^2 + \bar{4}x + \bar{1}) + g(\bar{4}x) = \bar{1}$.

4. Feladat. (4 pont)

Adjon meg a $\mathbb{Z}_7$ test fölött két olyan különböző polinomot, amelyek ugyanazt a polinomfüggvényt adják meg. Indokolja meg választását.

(M) Az Euler-Fermat tétel alapján, például az x és x^7 polinomok ilyenek.

5. Feladat. (4 pont)

Adja meg egy 4 elemű test művelet táblázatait.

(M) A $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ test 4 elemű, művelet táblái (a fölülvonásokat az egyszerűség kedvéért elhagytuk):

+	0	1	x	$x + 1$
0	0	1	x	$x + 1$
1	1	0	$x + 1$	x
x	x	$x + 1$	0	1
$x + 1$	$x + 1$	x	1	0

$\cdot$	0	1	x	$x + 1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x + 1$
x	0	x	$x + 1$	1
$x + 1$	0	$x + 1$	1	x