

Algebra és számelmélet

1. zárthelyi megoldása

(2018. 10. 26.)

1. Feladat. (4 pont)

(A) Igaz-e, hogy tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén abból, hogy $\sqrt[n]{z}$ -nek van valós értéke következik az, hogy z is valós? Ha igen, akkor egy mondatban indokolja, ha nem, akkor adjon ellenpéldát.

(M) **Igaz**, mert $\mathbb{R}$ zárt a szorzásra.

(B) Igaz-e, hogy tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ -re, ha z^2 hatodik egységgyök, akkor z is hatodik egységgyök. Igazolja röviden, vagy adjon ellenpéldát.

(M) **Hamis**, ellenpélda bármelyik 12. primitív egységgyök.

(C) Az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ gyűrű zérusosztómentes. Ha az állítás igaz, akkor röviden bizonyítsa, míg ha nem, adjon meg egy zérusosztópárt (két olyan 2×2 típusú nemzéró mátrixot, amelyek szorzata a zérómátrix).

(M) **Hamis**, például az

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixok szorzata a zérómátrix.

(D) Igaz-e, hogy minden egységelemes gyűrűben $1 + 1 + 1 \neq 0$? (Itt 1 a gyűrű multiplikatív-, míg 0 az additív egységelemét jelöli.) Ha igaz, akkor röviden igazolja, ha nem, akkor adjon meg egy ellenpéldát.

(M) **Hamis**, például a $\mathbb{Z}_3$ gyűrűben nem teljesül.

2. Feladat. (4 pont)

Adja meg kanonikus alakban a következő gyökvonások eredményét:

$$\sqrt[3]{2+2i} \quad \sqrt[6]{-27}.$$

Megoldás. A $\sqrt[3]{-2+2i}$ értékei:

$$-1+i, \quad \frac{1-\sqrt{3}}{2} - i\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1+\sqrt{3}}{2} - i\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

A $\sqrt[6]{-27}$ értékei:

$$\pm\sqrt{3}i, \quad \mp\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. Feladat. (4 pont)

(A) Legyen $z \in \mathbb{C}$. Mutassa meg, hogy ha $|z| < \frac{1}{2}$, akkor

$$|(1+i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}.$$

Megoldás.

$$|(1+i)z^3 + iz| \leq |(1+i)| \cdot |z^3| + |i| \cdot |z| < 2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8} < \frac{3}{4}.$$

(B) Adj meg trigonometrikus és kanonikus alakban az

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{20}$$

komplex számot.

Megoldás.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))}{\sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4))} \right)^{20} &= \left(\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right) \right)^{20} \\ &= 2^{10} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \right) = 2^9(1 - i\sqrt{3}) \end{aligned}$$

4. Feladat. (4 pont)

Oldja meg az alábbi egyenletet.

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 = 0.$$

Megoldás.

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 = (x^2 + x + \alpha)^2 - ((2\alpha + 3)x^2 + (2\alpha - 6)x + (\alpha^2 + 15))$$

$$D = (2\alpha - 6)^2 - 4(2\alpha + 3)(\alpha^2 + 15) = -8\alpha^3 - 8\alpha^2 - 144\alpha - 144 = 0$$

$$\alpha = -1$$

$$(x^2 + x - 1)^2 - (x^2 - 8x + 16) = (x^2 + x - 1)^2 - (x - 4)^2 = 0$$

$$(x^2 + 2x - 5)(x^2 + 3) = 0,$$

$$\text{amiből } x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{6}, \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{3}i.$$

5. Feladat. (4 pont)

Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, ill. testet:

(A) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ a valós számok azokásos műveleteivel;

(M) Test.

(B) $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$ a szokásos mátrixműveletekkel;

(M) Nem gyűrű (nem zárt az összeadásra).

(C) $\mathbb{Z}[\alpha] = \{a + b\alpha : a, b \in \mathbb{Z}, \alpha^3 = 1, \alpha \neq 1\}$ a komplex számok szokásos műveleteivel;

(M) Integritástartomány.

(D) az összes komplex egységgyökök halmaza, a komplex számok szokásos műveleteivel.

(M) Nem gyűrű (nem zárt az összeadásra).