

Név:

Összpontszám:

Algebra és számelmélet

2. zárthelyi megoldása

(2017. 11. 24.)

1. Feladat. (3 pont)

Igazak-e a következő állítások. Válaszát röviden indokolja.

(A) Ha $n > 2$ egész, akkor $\varphi(n)$ páros.

(M) **Igaz.** A függvény gyenge multiplikatívítása miatt a $\varphi(n) = \prod (p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1})$ p_i prím szorzatban csak akkor nincs páros tényező, ha $n = 2$, de ezt kizártuk.

(B) Minden mod 35 redukált maradékrendszer 25 elemű.

(M) **Hamis**, mert $\varphi(35) = 24$, azaz a redukált maradékrendszerek 24 eleműek.

(C) A $90x \equiv 18 \pmod{138}$ lineáris kongruencia nem oldható meg.

(M) **Hamis**, mert $\text{ln. k. o.}(90, 138) = 6$.

2. Feladat. (3 pont)

Adja meg a

$$27x + 31y = 5$$

diophantoszi egyenlet összes megoldását.

(M) $x = -9 + 31k$, $y = 8 - 27k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Feladat. (3 pont)

határozza meg 2^{100} utolsó két számjegyét.

(M) $2^{100} = 4^{50}$, $4^{5 \cdot 1024} \equiv 24 \pmod{100}$. $24^3 \equiv 24 \pmod{100}$ és így

$$2^{100} = 4^{50} \equiv 24^{10} = 13824^3 \cdot 24 \equiv 24^4 \pmod{100} \equiv 76 \pmod{100}$$

4. Feladat. (4 pont)

Határozzon meg olyan $u, v \in \mathbb{R}[x]$ polinomokat, amelyekre $fu + gv = \text{ln. k. o.}(f, g)$, ha

$$f = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1, \text{ és } g = x^4 + 2x^3 + x + 2.$$

(M) $f(-1) + g(x+1) = x^3 + 1$.

5. Feladat. (4 pont)

Oldja meg az $fu + gv = \bar{1}$ egyenletet a $\mathbb{Z}_5[x]$ polinomgyűrűben, ahol

$$f = x^2 + \bar{3}x + \bar{1} \quad \text{és} \quad g = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{4}x + \bar{2}.$$

(M) $f(x^2 + \bar{4}x + \bar{1}) + g(\bar{4}x) = \bar{1}$.

6. Feladat. (3 pont)

Határozza meg az

$$\left(\frac{112}{449}\right)$$

Legendre szimbólum értékét.

(M)

$$\begin{aligned}\left(\frac{112}{449}\right) &= \left(\frac{2^4}{449}\right) \left(\frac{7}{449}\right) = \left(\frac{7}{449}\right) \\ \left(\frac{7}{449}\right) \left(\frac{449}{7}\right) &= (-1)^{\frac{7-1}{2} \frac{449-1}{2}} = 1 \\ \left(\frac{7}{449}\right) &= \left(\frac{449}{7}\right) \\ 449 &\equiv 1 \pmod{7} \\ \left(\frac{112}{449}\right) &= \left(\frac{449}{7}\right) = \left(\frac{1}{7}\right) = 1.\end{aligned}$$