

Név:

Összpontszám:

Algebra és számelmélet

1. zárthelyi megoldása

(2017. 10. 27.)

1. Feladat. (4 pont)

(A) Igaz-e, hogy tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén abból, hogy $\sqrt[n]{z}$ -nek van valós értéke következik az, hogy z is valós? Ha igen, akkor egy mondatban indokolja, ha nem, akkor adjon ellenpéldát.

(M) **Igaz**, mert $\mathbb{R}$ zárt a szorzásra.

(B) Igaz-e, hogy tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ -re, ha z^2 harmadik egységgyök, akkor z is harmadik egységgyök. Igazolja röviden, vagy adjon ellenpéldát.

(N) **Hamis**, ellenpélda bármelyik hatodik primitív egységgyök, például: $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(C) Van-e olyan egységelemes gyűrű, amelyben végtelen sok egység van? Ha van, akkor adjon meg egyet, ha nincs ilyen gyűrű, akkor ezt bizonyítsa be.

(M) **Van** ilyen, pl. a $\mathbb{Q}$ test.

(D) Igaz-e, hogy minden egységelemes gyűrűben $1 + 1 \neq 0$? (Itt 1 a gyűrű multiplikatív-, míg 0 az additív egységelemét jelöli.) Ha igaz, akkor röviden igazolja, ha nem, akkor adjon meg egy ellenpéldát.

(M) **Hamis**, mert $\mathbb{Z}_2$ -ben $1 + 1 = 0$.

2. Feladat. (4 pont)

Adja meg kanonikus alakban a következő gyökvonások eredményét:

$$\sqrt[3]{-2+2i} \qquad \sqrt[6]{-27}.$$

Megoldás. A $\sqrt[3]{-2+2i}$ értékei:

$$-1+i, \quad \frac{1-\sqrt{3}}{2} - i\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1+\sqrt{3}}{2} - i\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

A $\sqrt[6]{-27}$ értékei:

$$\pm\sqrt{3}i, \quad \mp\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. Feladat. (4 pont)

(A) Egységgyökök-e a következő komplex számok. ha igen, akkor hányadik egységgyök?

$$\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}; \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}.$$

- (M) $|\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}| \neq 1$ ezért nem egységgyök,
 $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ nyolcadik egységgyök,
 $\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}$ 24. egységgyök.
 (B) Adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban az

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{20}$$

komplex számot.

(M)

$$\begin{aligned} \left(\frac{2(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3))}{\sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4))} \right)^{20} &= \left(\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{12} \right) \right) \right)^{20} \\ &= 2^{10} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{3} \right) \right) = 2^9(1 - i\sqrt{3}) \end{aligned}$$

4. Feladat. (4 pont)

Oldja meg az alábbi egyenletet.

$$x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0.$$

Megoldás.

$$x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = (x^2 - x + \alpha)^2 - ((2\alpha - 3)^2 - (2\alpha - 2)x + (\alpha^2 - 3)) = 0$$

$$D = \alpha^3 - 2\alpha^2 - 2\alpha + 4 = 0$$

$$\alpha = 2$$

$$x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = (x^2 - x + 2)^2 - (x - 1)^2$$

$$= (x^2 + 1)(x^2 - 2x + 3)$$

$$x = \pm i \quad x = 1 \pm \sqrt{2}i$$

5. Feladat. (4 pont)

Az alábbi számhalmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, ill. testet:

(A) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\};$

(M) Integritástartomány, ugyanis zárt az összeadásra és a szorzásra, de nem test.

(B) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\};$

(M) Test.

(C) $\mathbb{Z}[\alpha] = \{a + b\alpha : a, b \in \mathbb{Z} \alpha^3 = 1, \alpha \neq 1\};$

(M) Integritástartomány, ugyanis $\alpha^2 = -1 - \alpha$.

(D) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{3}\}.$

(M) Nem zárt a szorzásra — ellenpélda: $(1 + 4i)(4 + i) = 17i$
 — így még csak nem is gyűrű.