

BEVEZETŐ GONDOLATOK AZ
ALGEBRA TÖRTÉNETE
HAMMURAPITÓL G. BIRKHOFFIG

C. KURZUSHOZ.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2015. február 5.

Honnan ered az ALGEBRA kifejezés 1.

- 1 Al-Manszur (754-775), Hárún ar-Rasid (786-809) és al-Mámun (813-833) kalifák tudósokat gyűjtöttek Bagdadba, előbb Könyvtárat alapítottak majd az ún. Bölcsesség Házát (alexandriai mintára)
- 2 A tudósok első generációjához tartozott a Horezmből származó MUHAMMAD AL-KHWARIZMI, aki valamikor 780 és 850 között élt. Mámun idején került a Bölcsesség házába.
- 3 Előbb egy aritmetikai traktárust állított össze, majd egy hosszú (némileg megtévesztő) címűt, amelyben jelentős részt szentelt az iszlám örökösödési joggal — elsősorban a végrendeletekkel — kapcsolatos számításoknak. A mű rövid címe: AL-KITÁB AL-MUKTASZAR FÍ-SZIHÁB AL-DZSABR VAL-MUKÁBALA, magyarul: Rövid könyv a dzsabr és a mukabala számításokról.

Honnan ered az ALGEBRA kifejezés 2.

Nyelvészeti megközelítés.

Nyelvészek az **al-dzsabr** (amely az ún. nyugati arab nyelvben al-gebr) szóból származtatják a mai „algebra” szót, aminek alapot ad, hogy Khwarizmi művének első latin fordítása címében szerepel e szó „algebra”-ként.

- 1 Az al-dzsabr és a **val-mukábala** szó pontos jelentéséről viták folytak és folynak, most csak annyit, hogy az előbbi **kiegészítés/összeillesztés**-nek, az utóbbit **összevonás**-nak fordíthatjuk.
- 2 Ezek alapján a középkori itáliai matematikusok és számolómesterek algebra (algibra) néven emlegették az egyenletek megoldásának tudományát.
- 3 A nyugati arabban olykor **algebristának** nevezték a csontkovácsot.

Az algebra tárgya 1.

A matematikában a szimbólumok használata a XV. században kezdődött, korábban mindent szövegesen írtak le. Ez időtől kezdve az algebra szó jelentése kiszélesedett, magába foglalta a szimbólumokkal való számolásokat. Ez az alapja annak hogy a nyelvújítás korában magyarra **betűszám**-ként „fordították” le. Ezt középiskolai tankönyvekben még a múlt század 30-as éveiben is olvashattuk.

- A XIX. századig
 - ▶ az egyenletek elmélete, lényegében az egyenletmegoldási módszerek, technikák (visszahatóan a Khwarizmi előtti időkre is).
- A XIX. század elejétől némi bővülés
 - ▶ elsődlegesen az egyenletek megoldhatóságával kapcsolatos vizsgálatokban, fölvetették: egyáltalán megoldható minden egyenlet?
 - ▶ e terminológiát használták a permutációkkal (helyettesítések) való számolásokra, majd a tetszőleges szimbólumokkal való számolásokra is.

Az algebra tárgya 2.

- Az egyenletek megoldhatóságának vizsgálatában fontos szerepet játszottak bizonyos véges számhalmazok permutációi és e permutációk kompozíciói (egymás után való elvégzésük).
- Elsősorban Galois és Cayley (a XIX. század első harmada) érdeme, hogy észrevették: a permutációk kompozíciója egy (asszociatív) szorzás műveletnek is tekinthető.
- E fölismerés vezetett el a (permutáció)csoporthoz, az algebra tárgyköre bővült.
- E bővülés ismeretelméleti, tudományelméleti jeletőséggel is bírt:
 - ▶ Megdőlt az az évezredek nézete, hogy a matematika kizárólag mennyiségi (számokkal kifejezhető) kérdésekkel foglalkozik.
 - ▶ A permutációcsoport (akkor még nem nevezték így) volt az első olyan objektum a matematikában, amely nemcsak mennyiségi jellemzőkkel bírt, hanem bizonyos értelemben **minőséggel** is,
 - ▶ egy halmazt, egy összességet — adott tulajdonságokkal rendelkező — művelettel együtt vizsgált.

Az algebra tárgya 3.

- Ezzel kezdetét vette az algebra egy „új korszaka”, amelyben a korábbi — immáron klasszikus — problémák mellett ún. „algebrai struktúrákat” is vizsgáltak. Rövidesen ez lett a fő irány.
 - 1 Kezdetben csoportokat és testeket vizsgáltak, és
 - 2 a számfogalom precizizálásakor bevezették a (test fölötti) algebra fogalmát is.
 - 3 A struktúrákkal foglalkozó algebrai fejezetet egyre inkább **modern algebrának** nevezték, megkülönböztetésül a korábbi **klasszikus algebrától**.
- A XIX. század utolsó negyedétől kezdve egyre több absztrakt struktúrát vizsgáltak: az eddigiek alapján bevezették
 - 1 a test általánosításaként a gyűrű fogalmát, amelynek rögtön számelméleti alkalmazásai lehetőségeire nyílt lehetőség (ideálok a Fermat sejtéssel kapcsolatos vizsgálatokban), majd
 - 2 a XX. század elején megjelentek a hálók és a Boole-algebrák, majd
 - 3 a 30-as évek elején a csoport fogalmának általánosításaként a félcsoportok.

Az absztrakt algebra 1.

- Az eddig említett „klasszikus algebrai struktúrák” elméletét együttesen kezdték **absztrakt algebrának** is nevezni. E témából az első monográfia az 1930-as években jelent meg, B. L. van der Waerden *Moderne Algebra* c. három kötetes műve.
- Ugyanezen időben egyre nyilvánvalóbbá vált, hogy az egyes absztrakt algebrai struktúrák (csoportok, gyűrűk, stb.) elméletében számos igen hasonló tartalmú tétel érvényes. Ez fölvetette azt, hogy **meg lehetne alkotni egy „egységes struktúraelméletet”**.
- Az egységes (általános) elmélet kialakításának első lépése G. Birkhoff 1936-ban publikált dolgozata volt, innen számíthatjuk az **általános algebra** megjelenését (kezdetben univerzális algebraként említették, és ez a terminológia a mai napig is használatos).

Az absztrakt algebra 2.

Kapcsolat a logikával.

- Az asszociativitás és a többi algebrai azonosság zöme „elsőrendű formulákkal” írható le.
- Fontos kérdéssé vált, hogy egyes konstrukciók milyen elsőrendű formulákat őriznek meg.
- Algebrák, algebra osztályok bizonyos tulajdonságai milyen azonosságokkal (elsőrendű formulákkal) jellemezhetők.

Az absztrakt algebra 3.

Teljességi kérdések.

- A klasszikus Lagrange-féle interpolációs probléma megfogalmazható absztrakt algebraikra is.
- Vizsgálhatók olyan kérdések, mint egy véges (A, F) algebra esetén
 - 1 általában mely $A^n \rightarrow A$ leképezések állíthatók elő az F -beli műveletekből (az ismert összetett függvény képzésekkel)?
 - 2 mi a helyzet, ha csak bizonyos tulajdonságú leképezéseket tekintünk?
 - 3 Milyen tulajdonságú algebraik esetén teljesül az előbbiekből valamelyike az összes leképezésre?

A kurzuson érintett kérdések.

Klasszikus algebra 1.

- A másodfokú egyenletekre vezető problémák és azok megoldása Hammurapi korában (az Óbabiloni Birodalom korában). Algoritmus a (pozitív racionális) számok négyzetgyök kiszámítására.
- Lineáris egyenletrendszerekre vezető problémák és azok megoldási eljárásai az ókori Kínában.
- Középkori iszlám matematikusok néhány jellegzetes eredménye az egyenletek elméletében (pl. al-Khwarizmi, Abu Kamil, Omar Khayyam).
- A reneszánsz Itália algebraja (a pisai Leonardtól Cardanoig és Bombelliig: a firenzei Benedek mester, A. Mazzighni, a pisai Dardi mester).
- Ami végül elvezetett Galois eredményéhez (Waringtól Abel- és Gaussig).

A kurzuson érintett kérdések.

Klasszikus algebra 2.

Galois eredményei: mikor létezik „gyökképlet”, mely egyenletek gyökei kaphatók meg az együttthatókból.

Absztrakt algebra 1.

- A permutációcsoportokkal kapcsolatos első eredmények a XIX században.
- Az egyik első nem kommutatív struktúra: Hamilton kvaterniói.
- A csoport absztrakt fogalmának megjelenése.
- Az első struktúrátételek (pl. a véges Abel-csoportok alaptétele).
- További "klasszikus" absztrakt algebrai struktúrák: gyűrűk, hálók.

A kurzuson érintett kérdések.

Absztrakt algebra 2.

- Az univerzális (általános) algebra megjelenése. A legfontosabb konstrukciók, G. Birkhoff első idevonatkozó eredményei 1936-ból (varietások, szubdirekt fölbontás).
- Az algebra és a logika kapcsolata (megőrzési tételek, Malcev-típusú jellemzések).
- Teljességi kérdések.

A föltételezett előismeretek.

- ❶ Klaszikus algebra:
 - ▶ polinom,
 - ▶ egyenlet, egyenletrendszer,
 - ▶ permutáció,
 - ▶ művelet.
- ❷ Lineáris algebra:
 - ▶ mátrix.
- ❸ Absztrakt algebra:
 - ▶ csoport, gyűrű, test;
 - ▶ testbővítés.