

AZ ÁLTALÁNOS (UNIVERZÁLIS) ALGEBRA KIALAKULÁSA, NÉHÁNY EREDMÉNYE.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2013. május 8.

Néhány hasonló tétel.

A csoportelméleti homorfiatétel.

Legyen G, H két csoport, $\varphi: G \rightarrow H$ pedig szürjektív homomorfizmus. Van olyan $N \triangleleft G$ normálosztó, hogy

$$H \cong G/H.$$

A gyűrűelméleti homorfiatétel.

Legyen R, S két gyűrű, $\varphi: R \rightarrow S$ pedig szürjektív homomorfizmus. Van olyan $I \triangleleft R$ ideál, hogy

$$S \cong R/I.$$

Néhány hasonló tétel.

A csoportelméleti 1. izomorfiatétel.

Legyen G csoport, B részcsoportja G -nek, $N \triangleleft G$. Ekkor BN részcsoport G -ben, $B \cap N \triangleleft B$, továbbá

$$BN/N \cong B/B \cap N,$$

A gyűrűelméleti 1. izomorfiatétel.

Legyen R gyűrű, S részgyűrűje R -nek, $I \triangleleft R$. Ekkor $R + I$ részgyűrű R -ben, $S \cap I \triangleleft S$, továbbá

$$(S + I)/I \cong S/(S \cap I),$$

Néhány hasonló tétel.

A csoportelméleti 2. izomorfiatétel.

Legyen G csoport, $H \subseteq G$ részcsoport és $N \triangleleft G$ olyan normálosztó, hogy $N \subseteq H$. $H/N \triangleleft G/N$ pontosan akkor teljesül, ha $H \triangleleft G$, és ekkor

$$(G/N)/(H/N) \cong G/H.$$

A gyűrűelméleti 2. izomorfiatétel.

Legyen R gyűrű, $S \subseteq R$ részgyűrű és $I \triangleleft R$ olyan ideál, hogy $I \subseteq S$. $S/I \triangleleft R/I$ pontosan akkor teljesül, ha $S \triangleleft R$, és ekkor

$$(R/I)/(S/I) \cong R/S.$$

Egy természetes fölvetés.

MI LEHET AZ A KÖZÖS TULAJDONSÁGA A CSOPORT NORMÁLISZTÓJÁNAK ÉS A GYŰRŰ IDEÁLJÁNAK?

Mit vehetünk észre?

1. Mindkettő speciális tulajdonságú részcsoporthoz, ill. részgyűrűhöz, és
2. mindkettő segítségével osztályozás definiálható a struktúrák alaphalmazain.
3. Sőt, ezen osztályozások kompatibilisek a műveletekkel, ami a faktorcsoport, ill. a faktorgyűrű fogalmának bevezetéséhez vezetett.

Keressünk közös tulajdonságokat.

- Minden osztályozás egyértelműen meghatároz egy ekvivalencia relációt.
- Mit jelent az osztályozás kompatibilis volta a hozzá tartozó relációra?
- Ha te a G csoport $N \triangleleft G$ normálosztójához, vagy az R gyűrű $I \triangleleft R$ ideáljához tartozó ekvivalencia-reláció, akkor az osztályozások **kompatibilitása** azt jelenti, hogy
 1. tetszőleges $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$ elemekre

$$a_1 \vartheta b_1 \text{ és } a_2 \vartheta b_2 \Rightarrow (a_1 a_2) \vartheta (b_1 b_2)$$

2. illetve tetszőleges $a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$ elemekre

$$a_1 \vartheta b_1 \text{ és } a_2 \vartheta b_2 \Rightarrow (a_1 \circ a_2) \vartheta (b_1 \circ b_2)$$

ahol $\circ \in \{+, \cdot\}$.

- Emlékezzünk a számelméleti kongruenciára.

Közös általánosítás 1.

Definíció.

Legyen g csoport (R gyűrű) és ϑ ekvivalencia-reláció a G (az R) halmazon. Azt mondjuk, hogy ϑ **kongruencia-relációja a G csoportnak (az R gyűrűnek)**, ha kompatibilis a G csoport, ill. az R gyűrű műveletével, ill. műveleteivel.

Megjegyzés.

Vegyük észre, hogy az ismert modulo n kongruenciák kongruencia relációi az egész számok $\mathbb{Z}$ gyűrűjének.

Még egy definíció.

- **Definíció.** Legyen A, B két halmaz, $\eta: A \rightarrow B$ tetszőleges leképezés. A $\ker \eta = \{(a, a') \in A \times A: a\eta = a'\eta\}$ relációt a **az η leképezés magjának** nevezzük.
- Egyszerűen látható, hogy a $\ker \eta$ ekvivalencia-reláció A -n.

Közös általánosítás 2.

Néhány egyszerű tétel.

1. Csoportok, gyűrűk esetén a homorfizmusok magja kongruencia-reláció.
2. Csoportok, gyűrűk esetén a kongruencia-relációkhoz tartozó osztályozások kompatibilis osztályozások.
3. Ha ϑ valamely G csoport (R gyűrű) kongruencia-relációja, akkor a ϑ -hoz tartozó osztályozásnak pontosan egy olyan osztálya van, amely részcsoporthoz (részgyűrűhöz) tartozik.
4. Az előbbi részcsoporthoz (részgyűrűhöz) normálosztó (ideál), és a ϑ osztályok ezen normálosztó (ideál) szerinti mellékosztályok.

Közös általánosítás 3: a klasszikus tételek átfogalmazása.

A kiinduló lépés.

A homorfia- és az izomorfia-tételekben a normálosztó (ideál) helyett kongruencia-relációt, a részcsoport (részyűrű) helyett ekvivalencia-relációt tekintünk. $\text{Con}(G)$, ill. $\text{Con}(R)$ jelöli a G csoport, ill. az R gyűrű összes kongruencia-relációi halmazát.

Homorfiatételek.

- Legyen G, H két csoport, $\varphi: G \rightarrow H$ pedig szürjektív homomorfizmus. Van olyan $\vartheta \in \text{Con}(G)$, hogy

$$H \cong G/\vartheta.$$

- Legyen R, S két gyűrű, $\varphi: R \rightarrow S$ pedig szürjektív homomorfizmus. Van olyan $\vartheta \in \text{Con}(R)$, hogy

$$S \cong R/\vartheta.$$

Közös általánosítás 3: a klasszikus tételek átfogalmazása.

2. izomorfiatétel.

Legyen G csoport, $\alpha \in \text{Con}(G)$, $\beta \supseteq \alpha$ ekvivalencia-reláció a G halmazon. Jelölje β/α a következő relációt az G/α faktorhalmazon

$$(\bar{a}, \bar{b}) \in \beta/\alpha \Leftrightarrow (a, b) \in \beta$$

β/α pontosan akkor kongruenciája az G/α faktorcsoportnak, ha $\beta \in \text{Con}(G)$. Valahányszor ez teljesül, mindannyiszor

$$(G/\alpha)/(\beta/\alpha) \cong G/\beta$$

Közös általánosítás 3: a klasszikus tételek átfogalmazása.

1. izomorfiatétel.

- Legyen G csoport, $B \subseteq G$ részcsoport, $\vartheta \in \text{Con}(G)$, továbbá

$$\langle B \rangle = \{a \in G \mid \exists b \in B, a\vartheta b\}$$

Ekkor

$$\langle B \rangle / (\vartheta \upharpoonright \langle B \rangle) \cong B / (\upharpoonright B).$$

- Legyen R gyűrű, $S \subseteq R$ részyűrű, $\vartheta \in \text{Con}(R)$, továbbá

$$\langle S \rangle = \{a \in R \mid \exists b \in S, a\vartheta b\}$$

Ekkor

$$\langle S \rangle / (\vartheta \upharpoonright \langle S \rangle) \cong S / (\vartheta \upharpoonright S).$$

Közös általánosítás 3: a klasszikus tételek átfogalmazása.

2. izomorfiatétel.

Legyen R gyűrű, $\alpha \in \text{Con}(R)$, $\beta \supseteq \alpha$ ekvivalencia-reláció az R halmazon. Jelölje β/α a következő relációt az R/α faktorhalmazon

$$(\bar{a}, \bar{b}) \in \beta/\alpha \Leftrightarrow (a, b) \in \beta$$

β/α pontosan akkor kongruenciája az R/α faktorgyűrűnek, ha $\beta \in \text{Con}(R)$. Valahányszor ez teljesül, mindannyiszor

$$(R/\alpha)/(\beta/\alpha) \cong R/\beta$$

Megjegyzés.

Vegyük észre, hogy mindhárom tételpár lényegében ugyanazon egyetlen tétel, csak...

Egy további közös gyökerű fogalom.

Csoportok direkt szorzata klasszikusan.

Legyen G csoport, $N_1, \dots, N_k \triangleleft G$.

$$G \cong G/N_1 \times \dots \times G/N_k$$

pontosan akkor teljesül, ha

- $[N_1 \cup \dots \cup N_k] = G$,
- minden $1 \leq i \leq k$ -ra

$$N_i \cap [N_1 \cup \dots \cup N_{i-1} \cup N_{i+1} \cup \dots \cup N_k] = \{1\}.$$

Egy további közös gyökerű fogalom.

Csoportok direkt szorzata kongruenciákkal.

Legyen G csoport, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \text{Con}(G)$.

$$G \cong G/\alpha_1 \times \dots \times G/\alpha_k$$

pontosan akkor teljesül, ha minden $1 \leq i, j \leq k$ -ra

- $\left[\bigcup_{i=1}^k \alpha_i \right] = \bigvee_{i=1}^k \alpha_i = \iota$,
-

$$\alpha_i \cap [\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_{i-1} \cup \alpha_{i+1} \cup \dots \cup \alpha_k] = \omega,$$

ahol ι, ω a teljes- ill. az egyenlőség-relációt jelöli.

A véges Abel-csoportok alaptétele.

Minden véges Abel-csoport prímszámrendű ciklikus csoportok (direkt fölbonthatatlan csoportok) direkt szorzatára bontható.

Egy további közös gyökerű fogalom.

Egy további közös gyökerű fogalom.

Gyűrűk direkt szorzata.

- Kérdés: lehet-e a véges Abel-csoportok alaptételéhez hasonló tételt igazolni gyűrűkre? Esetleg valamilyen „jó tulajdonságú” gyűrűosztályra?
- Igaz-e, hogy minden gyűrű direkt fölbonthatatlan gyűrűk direkt szorzatára bontható.
- A válasz több oknál fogva NEM (csoportokra is ez a válasz), nem teljesül a számelmélet alaptételéhez hasonló állítás.

Gyűrűk direkt szorzata.

1. Két lehetőség van:
 - 1.1 Általánosítjuk a direkt szorzat fogalmát (erre a csoportok esetén is szükség van).
 - 1.2 Speciális gyűrűosztályokat tekintünk, és további feltételeket támasztunk.
2. Az 1. esettel később foglalkozunk.
3. A 2. esetben a következőt tesszük.
 - 3.1 Összegyűjtjük egy adott osztályban a „rossz” gyűrűket, pontosabban a „rossz” gyűrűrészeket, amelyekre nem igaz a kívánt struktúratétel, amelyek azt „elrontanák”.
 - 3.2 Ezek — ha bizonyos további feltételek teljesülnek — az ún. **radikálosztályok**.

Egy további közös gyökerű fogalom.

Gyűrűk direkt szorzata.

- **Definíció.** Legyen R gyűrű, és I ideálja. Az

$$\{r \in R \mid \exists k \in \mathbb{N}, \text{ hogy } r^k \in I\} = \sqrt{I}$$

ideál az I ideál **radikálja**, vagy **nil-radikálja**.

- **Definíció.** Legyen R egységelemes gyűrű. A

$$J(R) = \{a \in R \mid 1 - a \text{ invertálható}\}$$

ideált R **Jacobson-radikáljának** nevezzük.

- **Definíció.** Azt mondjuk, hogy R **Artin-gyűrű**, ha balideáljai bármely nemüres halmazában van minimális elem.

Gyűrűk.

Egy struktúratétel.

Wedderburn-Artin tétel. Legyen R gységelemes Artin-gyűrű. Az $R/J(R)$ faktorgyűrű véges sok ferdetest fölötti teljes mátrixgyűrű direkt szorzatára bontható.

Közös általánosítás: Garrett BIRKHOFF (1911-96)

„univerzális algebra”

1. Definíció.

Legyen A nemüres halmaz és $n \in \mathbb{N}_0$. Az $f: A^n \rightarrow A$ leképezéseket A -n értelmezett n -ér műveletnek nevezzük. Az $\mathbf{A} = (A, F)$ párt, ahol F az A -n értelmezett műveletek egy halmaza, pedig **algebrának** nevezzük. Az imént definiált algebrák részalgebráit ugyanúgy definiáljuk, mint vektorterek esetén az altér, csoportok esetén a részcsoporthoz, gyűrűk részgyűrűi fogalmát.

2. Definíció.

Azt mondjuk, hogy az (A, F) és a (B, G) algebrák hasonlóak, ha van olyan $\lambda: A \rightarrow B$ bijektív leképezés, amely megőrzi az aritást, azaz n változós műveletet n változósba visz.

Megjegyzés.

Korábban, megkülönböztető jelzőként használták az **univerzális algebra** kifejezést is.

Közös általánosítás: Garrett BIRKHOFF (1911-96)

„univerzális algebra”

3. Definíció.

Legyenek (A, F) és (B, G) hasonló algebrák. Azt mondjuk, hogy a $\varphi: A \rightarrow B$ leképezés homomorfizmus, ha tetszőleges $f \in F$ és $a_1, \dots, a_n \in A$ -ra

$$(f(a_1, \dots, a_n))\varphi = (f\lambda)(a_1\varphi, \dots, a_n\varphi).$$

Megjegyzés. A továbbiakban az f és az $f\lambda$ műveleteket ugyanazzal a jellel jelöljük. Lényegében nem műveletnek, hanem „művelet szimbólumnak” tekintjük, hasonlóan pl. a „+” jelhez.

4. Definíció.

Legyenek $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$ hasonló algebraik, művelethalmazukat jelölje F . Tetszőleges n -ér $f \in F$ és $(a_{i1}, \dots, a_{ik}) \in A_1 \times \dots \times A_k$ -ra $(1 \leq i \leq n)$, legyen

$$f((a_{11}, \dots, a_{1k}), \dots, (a_{n1}, \dots, a_{nk})) = (f(a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, f(a_{1k}, \dots, a_{nk})).$$

A kapott $\mathbf{A} = (A, F)$ algebrát az $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$ algebraik direkt szorzatának nevezzük, és használjuk az

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_k$$

jelölést.

Univerzális algebra.

5. Definíció.

Legyen $\mathbf{A} = (A, F)$ algebra. Az A -n definiált ϑ ekvivalenciareláció kongruencia, ha tetszőleges $f \in F$ és $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$ -re $a_i \vartheta b_i, 1 \leq i \leq n$ maga után vonja, hogy

$$f(a_1, \dots, a_n) \vartheta f(b_1, \dots, b_n).$$

Az $\mathbf{A}$ algebra összes kongruenciáinak halmazát $\text{Con}(\mathbf{A})$ fogja jelölni.

Megjegyzés.

Megmutatható, hogy az egész számok gyűrűjének, a $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ algebrainak, kongruenciái a jól ismert számelméleti — modulo n — kongruenciák. Ez szolgál modellül a következő általános fogalomhoz is.

6. Definíció.

Legyen $\mathbf{A} = (A, F)$ algebra és $\vartheta \in \text{Con}(\mathbf{A})$. Az A/ϑ faktorhalmazon definiálhatjuk az F -beli műveleteket: ha $f \in F$, és $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in A/\vartheta$, akkor legyen

$$f(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = \overline{f(a_1, \dots, a_n)}.$$

A kapott $\mathbf{A}/\vartheta$ algebra hasonló $\mathbf{A}$ -hoz.

Algebraik homorfatiétele.

Legyenek $(A, F), (B, F)$ hasonló algebraik, Ha B az A homomorf képe, akkor van olyan ϑ kongruenciája A -nak, hogy

$$A/\vartheta \cong B.$$

Univerzális algebra.

Algebraik 1. izomorfatiétele.

Legyen $\mathbf{A}$ csoport, $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ részalgebra, $\vartheta \in \text{Con}(\mathbf{A})$, továbbá

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \{a \in \mathbf{A} \mid \exists b \in \mathbf{B}, a \vartheta b\}$$

Ekkor

$$\langle \mathbf{B} \rangle / (\vartheta \upharpoonright \langle \mathbf{B} \rangle) \cong \mathbf{B} / (\vartheta \upharpoonright \mathbf{B}).$$

Algebraik 2. izomorfatiétele.

Legyen $\mathbf{A}$ algebra, $\alpha \in \text{Con}(\mathbf{A})$, $\beta \supseteq \alpha$ ekvivalencia-reláció az A halmazon. Jelölje β/α a következő relációt az $\mathbf{A}/\alpha$ faktorhalmazon: $(\bar{a}, \bar{b}) \in \beta/\alpha \Leftrightarrow (a, b) \in \beta$. Az β/α reláció pontosan akkor kongruenciája az $\mathbf{A}/\alpha$ faktoralgebrainak, ha $\beta \in \text{Con}(\mathbf{A})$. Valahányszor ez teljesül:

$$(\mathbf{A}/\alpha) / (\beta/\alpha) \cong \mathbf{A}/\beta$$

Univerzális algebra.

Algebrák direkt fölbontása 1.

Ha egy $\mathbf{A}$ algebrára $\mathbf{A} \cong \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \cdots \times \mathbf{A}_k$, akkor léteznek olyan $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k \in \text{Con}(\mathbf{A})$ kongruenciák, hogy

- $\mathbf{A}/\tau_i \cong \mathbf{A}_i$, $1 \leq i \leq k$,
- $\bigvee_{i=1}^k \tau_i = \iota$,
- $\tau_i \wedge (\bigvee_{j \neq i} \tau_j) = \omega$, $1 \leq i \leq k$,
- τ_i és $\bigvee_{j \neq i} \tau_j$ a szorzásnál fölcserélhetők minden $1 \leq i \leq k$ -ra.

Univerzális algebra.

Algebrák direkt fölbontása 2.

Ha az $\mathbf{A}$ algebrának léteznek olyan $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ kongruenciái amelyekre teljesül, hogy

- $\bigvee_{i=1}^k \tau_i = \iota$,
 - $\tau_i \wedge (\bigvee_{j \neq i} \tau_j) = \omega$, $1 \leq i \leq k$,
 - τ_i és $\bigvee_{j \neq i} \tau_j$ a szorzásnál fölcserélhetők minden $1 \leq i \leq k$ -ra,
- akkor

$$\mathbf{A} \cong \mathbf{A}/\tau_1 \times \cdots \times \mathbf{A}/\tau_k.$$

1. Tétel.

Minden **véges** algebra izomorf direkt fölbonthatatlan algebrák direkt szorzatával.

Univerzális algebra: algebrák szorzatra bontása.

Megjegyzés.

Létezik olyan végtelen algebra, amely nem bontható direkt fölbonthatatlan algebrák direkt szorzatára.

Kérdés.

Lehet-e a direkt szorzat fogalmát úgy általánosítani, hogy minden algebra fölbontható ezen szorzatra nézve irreducibilis algebrák (ilyen) szorzatára?

G. Birkhoff 1933.

Definíció. Az $\mathbf{A}$ algebra az $(\mathbf{A}_i | i \in I)$ hasonló algebrák egy **szubdirekt szorzata**, ha

1. $\mathbf{A}$ részalgebrája $\prod (\mathbf{A}_i | i \in I)$ -nek,
2. $\pi_i(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_i$ minden $i \in I$ -re, ahol π_i az i -edik projekció.

Univerzális algebra: algebrák szorzatra bontása.

G. Birkhoff tétele, 1944

Minden algebra szubdirekt irreducibilis algebrák szubdirekt szorzatára bontható.

Az algebra és a logika kapcsolata.

Hasonlósági osztályok.

Definíció. Az olyan algebra-osztályokat, amelyek hasonló algebraíkból állnak **hasonlósági osztályoknak** nevezzük.

Hozzárendelt elsőrendű nyelv.

Minden hasonlósági osztályhoz hozzárendelhető egy olyan elsőrendű nyelv, amelynek függvényjelei épp az adott hasonlósági osztály művelet szimbólumai.

Azonosság

Tekintsük hasonló algebra egy $\mathcal{A}$ osztályát és jelölje $\mathcal{L}$ a hozzá tartozó elsőrendű nyelvet. Az

$$f = g$$

jelsorozatot, ahol f, g a $\mathcal{L}$ nyelv kifejezései (termek), **azonosságnak** nevezzük.

Az algebra és a logika kapcsolata.

Azt mondjuk, hogy az $f = g$ azonosság teljesül az $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ algebraán, jelölése $\mathbf{A} \models \{f = g\}$, ha bármely $a_1, a_2, \dots \in A$ elemekre

$$f(a_1, a_2, \dots) = g(a_1, a_2, \dots).$$

Definíció.

Hasonló algebra egy $\mathcal{V}$ osztályát **varietásnak** nevezünk, ha azonosságok egy halmazával definiálható. Másképpen mondva: Legyen $\mathcal{A}$ hasonló algebra egy osztálya. Valamely $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$ osztályt varietásnak nevezünk, ha létezik azonosságok egy olyan Σ halmaza, hogy $\mathcal{V}$ pontosan azon algebraíkból áll, amelyeken teljesül valamennyi Σ -beli azonosság.

Birkhoff tétele 1936.

Hasonló algebra egy $\mathcal{V}$ osztálya pontosan akkor definiálható azonosságok egy halmazával, azaz alkot varietást, ha zárt a homomorf képek, a részalgebra és a direkt szorzatok képzésére.

Megjegyzés.

Ezen eredmény kiindulópontja az ún. *megőrzési tételek* kutatásának..

Egy újabb „klasszikus struktúra”.

Hálók.

- **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{L} = (L; \vee, \wedge)$ algebra **háló**, ha mindkét művelet asszociatív, kommutatív továbbá teljesülnek a következő azonosságok:

$$x \wedge x = x \vee x = x \text{ mindkét művelet idempotens}$$

$$x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x \text{ mindkét művelet abszorptív}$$

- Az $\mathbf{L}$ háló **disztributív háló**, ha mindkét művelet disztributív a másikra.
- **Megjegyzés.** Igazolható, hogy a két disztributív azonosság mindegyike következik a másikkól.

Kísérő struktúrák.

Automorfizmusok.

Egyszerűen látható, hogy egy adott **A** algebra automorfizmusai csoportot alkotnak, az algebra **automorfizmuscsoportja**, jelölése: $\text{Aut}(\mathbf{A})$.

Kérdések.

- Milyen közös tulajdonságai vannak az automorfizmuscsoportoknak.
- Mely csoportokhoz létezik olyan algebra, amelynek automorfizmuscsoportja izomorf az adott csoporttal.
- Adott csoporttulajdonság esetén tudunk-e mondani valamit azon algebrairól, amelyek automorfizmuscsoportja izomorf az adott csoporttal.

Kísérő struktúrák.

Részalgebrák.

Igazolható, hogy egy **A** algebra összes részalgebrái hálót alkotnak. Részalgebra háló: $\text{Sub}(\mathbf{A})$.

Kongruenciahálók.

Egy adott **A** algebra kongruencia-relációi hálót alkotnak. Kongruencia háló: $\text{Con}(\mathbf{A})$

Kérdések.

Az előbbivel analóg kérdések tehetők föl mindkét esetben.

Varietások Malcev-típusú jellemzései 1.

A kezdet.

1. **A.I. Malcev tétele.** (1954) *A $\mathcal{V}$ varitásban pontosan akkor teljesül, hogy bármely két algebra bármely két kongruenciája a szorzásnál fölcserélhető, ha létezik e varietás nyelvében olyan μ kifejezés, hogy a*

$$\mu(x, y, y) = \mu(y, y, x) = x$$

azonosság $\mathcal{V}$ minden algebráján teljesül.

2. **A. F. Pixley** (1963). *A $\mathcal{V}$ varietásban pontosan akkor teljesül, hogy minden algebra kongruenciahálója disztributív és bármely két kongruencia a szorzásnál fölcserélhető, ha létezik a varietásban olyan ν kifejezés, amelyre teljesül a*

$$\nu(x, y, x) = \nu(x, y, y) = \nu(y, y, x) = x$$

azonosság.

Varietások Malcev-típusú jellemzései 2.

Hálók kongruenciahálói.

B. Jónsson (1967). *A $\mathcal{V}$ varietásban pontosan akkor teljesül, hogy minden algebra kongruenciahálója disztributív, ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és $p_0, p_1, \dots, p_n$ kifejezések, amelyekre teljesülnek az alábbi azonosságok.*

$$\begin{aligned} p_i(x, y, x) &= x, \quad \text{ha } 0 \leq i \leq n \\ p_0(x, y, z) &= x, \quad p_n(x, y, z) = z \\ p_i(x, x, y) &= p_{i+1}(x, x, y), \quad \text{ha } i \text{ páros} \\ p_i(x, y, y) &= p_{i+1}(x, y, y), \quad \text{ha } i \text{ páratlan} \end{aligned}$$

Varietások Malcev-típusú jellemzései 3.

Egy általánosítás.

Tétel. (K.L. 1975.) *A $\mathcal{V}$ varietásban pontosan akkor teljesül, hogy minden algebra bármely részalgebrája egy alkalmas kongruencia osztálya, ha minden f n -ér kifejezéséhez van olyan k_f háromváltozós kifejezés, hogy*

$$f(x_1, \dots, x_n) = k_f(x_0, x_1, f(x_0, x_2, \dots, x_n))$$

azonosság minden $\mathcal{V}$ -beli algebrán.

Megjegyzés.

Malcev és Jónsonn tételében a kifejezésekre egzisztenciális kvantor vonatkozott csak, de az utóbbi tételben már univerzális is.

További, Szegedhez köthető jellemzések.

Teljességi kérdések. (A klasszikus Lagrange-tétel általánosításai.)

- **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A} = (A, F)$ véges algebra *primál (függvény-teljes)*, ha minden $f: A^n \rightarrow A$ leképezés (A -n definiált n -változós függvény) kifejezésfüggvény (polinom).
- **Csákány B., Szendrei Ágnes, Szabó L.** eredményei (a 80-as évek) szerint e kérdéskör szoros kapcsolatban van az algebra automorfizmusai csoportjával: annak „erősen” tranzitívnek és „elég nagy” kell lennie.