

A KORA KÖZÉPKORI ISZLÁM KULTÚRKÖR ALGEBRÁJA.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2013. február 27.

Bölcsességek Háza

Bagdad, mint az új tudományos központ.

- MANSZUR (754-775), HÁRUN AR-RASÍD (786-809), MAMUN (813-833) kalifák idején fokozatosan létrehozták a **Bait al-Hikma**-t, a **Bölcsességek Házát** alexandriai mintára.
- Összegyűjtötték az Akadémia 529-es bezárása (II. Jusztiniánusz) után keletre menekült tudósok tanítványait, akik nagy számú görög művet hoztak magukkal.
- Ezeket sorra arabra fordították, köztük Euklidesz, Arisztotelesz, Apolloniusz, Archimedesz, Ptolemaiosz, Heron, Diophantosz írásait. E mellett sok hindu művet is lefordítottak: pl. Brahmagupta könyveit.

Bölcsességek Háza

Bagdad, mint az új tudományos központ.

- Az iszlám tudományosság kb 1300-ig töretlenül fejlődött, majd lassú hanyatlásnak indult.
- A tudományos centrum ezzel párhuzamosan egyre északabbra került, a XV. századra már a mai Üzbegisztán területére.
- A XVI. századtól már Európáé a vezető szerep.

Történeti áttekintés.

Az első (ma ismert) matematikai értekezés.

- Abu Abdallah Muhammad ibn Músza **al-Hvárizmi** al-Mándzsúsi (780-850) algebrai értekezése,
- eredeti címe (röviden): Al-kitáb al-muktaszir fi-hiszáb al-dzsabr val-mukábala, azaz **Rövid könyv a dzsabr és a mukábala számolásról.**
- Megtévesztő, mert a könyvnek csak egy kisebb része foglalkozik ezzel.
- A fennmaradt legteljesebb és leginkább autentikus arab kéziratát Oxfordban őrzik, ez 1362-ben készült.

Az első (ma ismert) matematikai értekezés.

A címbeli kifejezések jelentése.

- **al-dzsabr**: egyrészt az egyenlet mindkét oldalához azonos tagok hozzáadása, hogy kiküszöböljük a negatív tagokat, másrészt az egyenlet mindkét oldalának megszorozása ugyanazzal a számmal, hogy kiküszöböljük a törteket.
Egy további — főként irodalmi — jelentése: **összeillesztés**.
- **al-mukábala**: a pozitív tagok redukciója (összevonása) az egyenlet mindkét oldalán azáltal, hogy azonos mennyiségeket vonunk ki az oldalakból.

Az első (ma ismert) matematikai értekezés.

Megjegyzések.

1. Al-Karadzi az al-mukábala kifejezést „egyenlővé tétel” értelemben is használta.
2. A szó irodalmi jelentése: összehasonlítás, szembeállítás.
3. Az al-dzsabr kifejezést a nyugati arabban al-gebr-nek írták, egyik irodalmi jelentése **csontkovács**.

Részletek al-Hvárizmi értekezéséből.

Legfőbb másodfokú egyenletek.

Hat típust tárgyalt:

- 1 (1) négyzet egyenlő a gyökkel: $ax^2 = bx$
- 2 (2) négyzet egyenlő egy számmal: $ax^2 = c$
- 3 (3) gyök egyenlő egy számmal: $ax = c$
- 4 (4) négyzet és a gyök egyenlő egy számmal: $ax^2 + bx = c$
- 5 (5) négyzet és a szám egyenlő a gyökkel: $ax^2 + c = bx$
- 6 (6) gyök és a szám egyenlő a négyzettel: $bx + c = ax^2$

al-Hvárizmi értekezése: (4) típusú egyenlet.

1. feladat.

Egy négyzet és tíz gyöke ugyanazon mennyiségnek harminckilenc dirhem, azaz mi legyen a négyzet, amelyet saját gyökének tízszeresével növelve harminckilencet ad?

Az eredeti szöveges megoldás.

- Megfelezed a gyökök számát, amely most ötöt ad.
- Ezt megszorozod önmagával; a szorzat huszonöt.
- Add ezt hozzá a harminckilenchez; az összeg hatvannégy.
- Vedd most ennek gyökét, ami nyolc, vond ki belőle a gyök felét, ami most öt.
- A maradék három. Ez a gyöke a keresett négyzetnek; a négyzet maga kilenc.

al-Hvárizmi értekezése: (4) típusú egyenlet.

A megoldás modern terminológiával.

- Megoldandó az

$$x^2 + 10x = 39$$

egyenlet.

- A leírt átalakítások formalizálása

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 \quad \text{dzsabr}$$

$$(x + 5)^2 = 64 \quad \text{mukábala}$$

$$x + 5 = \sqrt{64} = 8$$

$$x = 8 - 5 = 3.$$

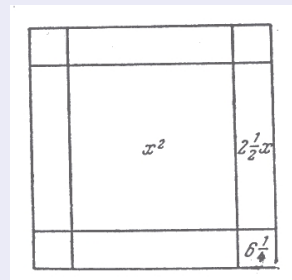
Lényeges új vonás.

A szöveges megoldást geometriai indoklás követi.

al-Hvárizmi geometriai indoklása.

- Rajzoljunk egy négyzetet, és mindegyik oldalához illesszünk egy-egy $\frac{10}{4}$ magasságú téglalapot,
- majd egészítsük ki négyzetté, ami négy $\frac{10}{4}$ oldalú négyzet hozzávételét jelenti.

Az ábra.



al-Hvárizmi geometriai indoklása.

A számolás.

- A kapott négyzet területe $39 + 4 \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^2 = 64$,
- Ennek oldala 8 hosszúságú, így a „belső négyzet” oldala $8 - 2 \cdot \frac{10}{4} = 3$.

al-Hvárizmi (4) típusú egyenletének formális megoldása.

- $x^2 + px = q$
- $x^2 + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)x + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2 = q + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2$,
- $\left(x + 2 \cdot \frac{p}{4}\right)^2 = q + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2$,
- $x + 2 \cdot \frac{p}{4} = \sqrt{q + 4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2}$,
- $x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}$.
- Emlékezzünk: $p = 10$ és $q = 39$ volt a feladatban.

al-Hvárizmi (5) típusú egyenlete.

2. probléma.

A 10-et két részre osztod. A részeket önmagukkal szorozva az összesen 58.

Megjegyzés.

Hvárizmi észrevette, hogy a feladatnak két pozitív megoldása van, azaz bizonyos egyenleteknek két pozitív gyöke lehet.

Szöveges megoldás.

- Felezd meg a gyököket, ez öt lesz,
- és szorozd meg ezt önmagával, lesz huszonöt,
- és vonj le ebből huszonegyet, amennyivel a négyzet ki van bővítve,
- marad négy, vonj ebből gyököt, ez kettő lesz,
- és vond ki ezt a gyök feléből, azaz ötből,

al-Hvárizmi (5) típusú egyenlete.

Szöveges megoldás: folytatás.

- marad három; és ez lesz a négyzet gyöke, amelyet keresel, a négyzet pedig kilenc.
- Ha pedig akarsz, add ezt a hozzá a gyökök feléhez, ez hét lesz,
- és ez a négyzet gyöke, amelyet keresel, a négyzet pedig negyvenkilenc.

A probléma mai megoldása.

A megoldandó egyenlet: $x^2 + (10 - x)^2 = 58$.

- $2x^2 + 100 - 20x = 58$
- $2x^2 + 100 = 58 + 20x$
- $x^2 + 21 = 10x$
- $x = 5 - \sqrt{5^2 - 21} = 3, \quad x = 5 + \sqrt{5^2 - 21} = 7.$

al-Hvárizmi (5) típusú egyenlete.

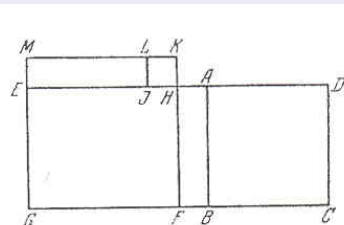
A probléma megoldása általánosan.

$$\begin{aligned}
 x^2 + q &= px \\
 \left(\frac{p}{2} - x\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\
 \frac{p}{2} - x &= \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
 x &= \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
 x &= \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}
 \end{aligned}$$

al-Hvárizmi (5) típusú egyenlete.

Hvárizmi geometriai indoklása: első eset.

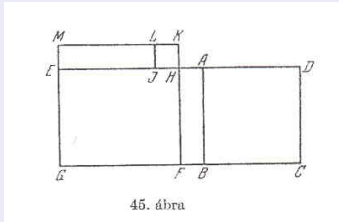
Tekintsük a $GCDE$ téglalapot (45. ábra), amelynek oldalai $GC = p$, $CD = x$, és az $ABCD$ négyzetből (területe x^2) valamint a vele határos $GBAE$ téglalaphoz (területe $(p - x)x$) áll.



45. ábra

al-Hvárizmi (5) típusú egyenlete.

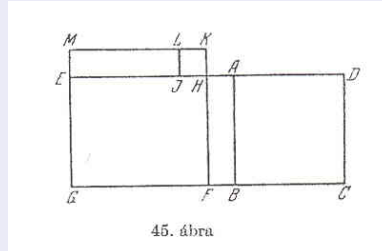
Hvarizmi geometriai indoklása: első eset.



- Föltételezve, hogy $x < \frac{p}{2}$ (ez nem szerepel Hvárizminél!), a GC szakasz F felezőpontjába merőlegest, ez FH, állítunk, amelyet a $HK = AH = \frac{p}{2} - x$ szakasszal meghosszabbítunk.

al-Hvárizmi (5) típusú egyenlete.

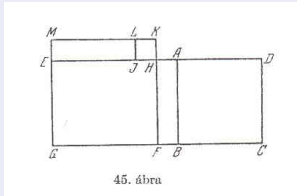
Hvarizmi geometriai indoklása: első eset.



- Megszerkesztjük a GMFK és IHKL négyzeteket, amelyek területe $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ és $\left(\frac{p}{2} - x\right)^2$.
- $EILM \cong FBAH$, hiszen a szerkesztés szerint oldalaik egyenlők.

al-Hvárizmi (5) típusú egyenlete.

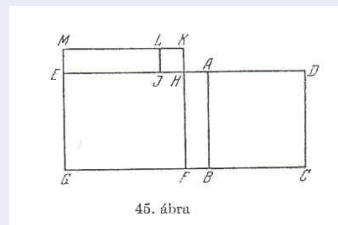
Hvarizmi geometriai indoklása: első eset.



- az ABCD négyzetből (területe x^2) valamint a vele határos GBAE téglalapból (területe $(p - x)x$) áll.
- Így az IHKL négyzet területe, amely a GFKM négyzetnek és a GFHE, valamint EILM téglalapok összegének különbsége, egyenlő a GFKM és GBAE négyszögek területének adott különbségével,

al-Hvárizmi (5) típusú egyenlete.

Hvarizmi geometriai indoklása: első eset.



- azaz

$$\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

- Hogyan indokolható a másik gyök?

Két gyök.

Megjegyzés.

Észrevehettük, hogy nemcsak a gyököt adja meg, hanem a gyök négyzetét is. Ez általános a korai iszlám algebrában. A X. századi **Abu Kámil** például geometriai úton igazolt szabályokat adott meg a (4)-(6) típusú egyenletek esetére.

Kámil eredménye mai formulákkal.

$$(4) \quad ax^2 + bx = c$$

$$(5) \quad ax^2 + c = bx$$

$$(6) \quad bx + c = ax^2$$

$$x = \frac{p^2}{2} + q - \sqrt{p^2 q + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2}, \quad (4)$$

$$x = \frac{p^2}{2} - q \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{2}\right)^2 - p^2 q}, \quad (5)$$

$$x = \frac{p^2}{2} + q + \sqrt{p^2 q + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2}. \quad (6)$$

Abu Kámil

Abu Kámil túllépett al-Hvárizmīn legalább két tekintetben:

- 1 Bonyolultabb egyenletekre vezető problémákkal is foglalkozott, pl. gyökmennyiségeket tartalmazókkal;
- 2 bár szinte kizárólag geometrián alapuló indoklásokat használt, határozott aritmetizálási tendenciák is fölfedezhetők nála.

Példák.

Szabályokat fogalmazott meg a törtekkel és a gyökmennyiségekkel való számolásokra:

- 1 $\left(\frac{a}{b}\right) b = a, \quad \frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1,$
- 2 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab},$
- 3 $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm \sqrt{ab}}$

Abu Kámil

Megjegyzés.

Természetesen mindezeket konkrét számpéldákon keresztül mutatta be:

$$\sqrt{18} \pm \sqrt{8} = \sqrt{18 + 8 \pm 2\sqrt{144}} = \sqrt{50}, \text{ ill. } \sqrt{2},$$

$$\sqrt{10} \pm \sqrt{2} = \sqrt{10 + 2 \pm \sqrt{20}}.$$

Miben új Kámil?

Követi Hvárizmī hagyományait, de a görög matematika fölhasználásával, és enyhe továbbvitelével túl is lép rajta.

- Tekintsük az

$$x^2 + q = px$$

egyenletet.

Abu Kámil

Miben új Kámil?

- Ő is kiszámolta az

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

gyököket, de

- de geometriai indoklása részletesebb.
- Hvárizmi explicite csak azzal az esettel foglalkozott, amikor negatív előjelű a négyzetgyök. Euklideszre csak ebben az esetben lehet hivatkozni, amit Kámil meg is tett.

Abu Kámil

Miben új Kámil?

Három esetet vizsgált. Mindig feltette, hogy $\left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$.

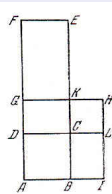
1. $x^2 < q$,
2. $x^2 > \left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$,
3. $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$.

Az első eset.

Ekkor $x^2 < \left(\frac{p}{2}\right)^2$

Abu Kámil

Ábra.



51. ábra

Abu Kámil

Elemzés.

- $ABCD$ x^2 területű négyzet,
- $DCEF$ q területű téglalap, $DF > DA$.
- $ABEF$ területe px , $DF = p$,
- ha G az AF szakasz felezőpontja, akkor e szakaszt G két egyenlő, míg D két nem egyenlő szakaszra osztja.

Euklidesz II.5. Tétele:

Ha egy egyenesszakaszt egyenlő és nem egyenlő részekre osztunk, akkor a teljes szakasz nem egyenlő részei által közrefogott téglalap meg az osztópontok közötti szakaszra emelt négyzet együtt egyenlő a szakasz felére emelt négyzettel.

Abu Kámil

A tétel alapján:

- $DF \cdot DA + GD^2 = AG^2$.
- Mivel $DF \cdot DA = q$, $AG = \frac{p}{2}$, és a föltevés szerint $GD = \frac{p}{2} - x$, így
- $x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ adódik.
- Ráadásként Kámil Euklidesz stílusában igazolta a *CKGAIL* sokszög és a *DCEF* téglalap területének egyenlőségét.

Abu Kámil

Egy érdekes feladata.

Osszuk föl a tízet két részre úgy, hogy a részek hányadosai összege önmagával szorozva öt.

A megoldás mai szimbolikával.

- Ha a két rész x és $10 - x$, akkor megoldandó az $\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = \sqrt{5}$ egyenlet.
- Hwarizmi eljárását követve

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{5})x^2 + 100 &= (20 + \sqrt{500})x \\ x^2 + \sqrt{50000} - 200 &= 10x \\ x &= 5 - \sqrt{225 - \sqrt{50000}}.\end{aligned}$$

- De ez a megoldás nem elégítette ki: újabb módszert keresett.

Abu Kámil

Kámil saját ötlete.

- **Dolognak** nevezve azt amit mi $\frac{10-x}{x}$ -szel jelöltünk, így az $y^2 + 1 = \sqrt{5}y$ egyenletet írhatjuk föl,
- amiből $y = \sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$ adódik,
- és ezután meg kell oldania az elsőfokú $\frac{10-x}{x} = \sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$ egyenletet.
- Ebből x elvileg könnyen kapható, de a nevezőbe irracionális (gyökmennyiség) kerülne, ami nem tetszik neki.

Abu Kámil

Kámil saját ötlete.

- Ezért a $10 - \frac{x}{2} = \sqrt{1\frac{1}{4}}x^2$ egyenlet mindkét oldalának négyzetét vette,
- így az $x^2 + 10x = 100$ egyenlethez jutott, amit már könnyű megoldani,
- és a **szebb** $x = \sqrt{125} - 5$ megoldást kapta.

Omar Khajjam

OMAR BEN IBRAHIM AL-KHAJJAM GHJJASU perzsa költő, csillagász és matematikus ~ 1044 — ~ 1123.

- Rubaiyat (E. Fitzgerald 1859, Szabó Lőrinc)
- 1074: naptárreform, Maliksah, Isfahan.

Harmadfokú egyenletek.

Hosszú ideig cáfolatlan sejtése: **A másodnál magasabfokú egyenletek nem oldhatók meg gyökjelekkel, csak geometriai úton.**

1. probléma: szám egyenlő egy köbvel.

- Megoldandó egy $x^3 = N$ alakú egyenlet.
- **Kiindulópont:** legyen adott két szakasz, és keresünk két olyan szakaszt, amelyekkel a négy szakasz folytonos arányban van, azaz ha a, b a két adott szakaszhoz, akkor a keresett x, y szakaszokra $a : x = x : y = y : b$.

Omar Khajjam

1. probléma: szám egyenlő egy köbvel.

- x, y nyilván az $y^2 = bx$ és $x^2 = ay$ parabolák metszéspontja segítségével kaphatók.
- Omar konstrukciója: egységnégyzet alapú N magaságú hasábot konstruált.
- A feladat ezen hasábbal egyenlő térfogatú kocka konstruálása.
- Ha $N = 2$, akkor ez nem más, mint a klasszikus kockaketőzési probléma.
- A chioszi HIPPOKRÁTÉS megmutatta, hogy e feladat épp az említett folytonos arányú szakaszok keresésére redukálható. Omar is ere hivatkozott. A parabolákon alapuló megoldás MENAICHMOSZ-tól származik.

Omar Khajjam

Vizsgált egyenlet típusok 1.

Egyik oldalon kéttagú, a másikon egytagú kifejezés áll (a teljesség kedvéért a legegyszerűbb — már vizsgált — egyenletet is föltüntettük).

$$\begin{aligned} x^3 &= b & (1) \\ x^3 + ax &= b & (2) \\ x^3 + b &= ax & (3) \\ x^3 &= ax + b & (4) \\ x^3 + ax^2 &= b & (5) \\ x^3 + b &= ax^2 & (6) \\ x^3 &= ax^2 + bx & (7) \end{aligned}$$

A megoldásokat kúpszeletek metszéspontjaként kapta.

Omar Khajjam

A (2) egyenlet.

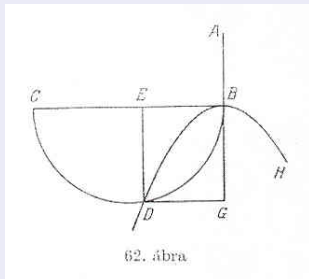
- Az egyenlet $x^3 + c^2x = c^2h$ alakra átírva
- a két görbe (parabola és kör) egyenlete $x^2 = yc$ és $y^2 = x(h - x)$ lesz.

A (3) egyenlet.

- Az egyenlet $x^3 + c^2h = c^2x$ alakban írva,
- a két görbe egyenlete $yc = x^2$ és $y^2 = x(x - h)$,
- azaz egy parabola és egy hiperbola.

Omar Khajjam

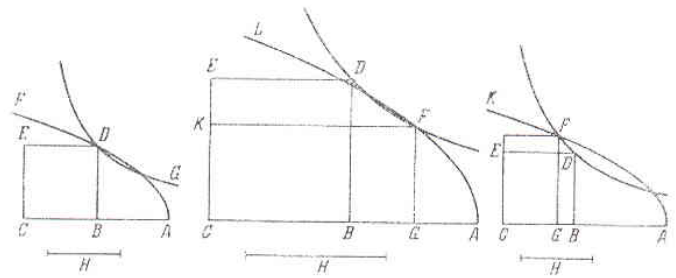
A (2) egyenlet.



62. ábra

Omar Khajjam

A (3) egyenlet.



63. ábra

Omar Khajjam

További egyenletek.

$$x^3 + ax^2 + bx = c \quad (8)$$

$$x^3 + ax^2 + c = bx \quad (9)$$

$$x^3 + bx + c = ax^2 \quad (10)$$

$$ax^2 + bx + c = x^3 \quad (11)$$

$$x^3 + ax^2 = bx + c \quad (12)$$

$$x^3 + bx = ax^2 + c \quad (13)$$

$$x^3 + c = ax^2 + bx \quad (14)$$

Minden esetben két-két kúpszelet metszéspontja adta a megoldást. Példáiban mindig volt egy pozitív megoldás.

Omar Khajjam egy szép megoldása.

A probléma

- Egy köb meg egy oldal és valamely szám együtt egyenlő egy négyzettel
- Mai megfogalmazással: ha adott egy egységnyi szakasz, továbbá az a, b, c szakaszok, akkor konstruálunk meg egy olyan x szakaszt, amelyre $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$.

Megjegyzések.

1. Azért geometriailag foglaltunk, mert a megoldás is ilyen.
2. Az egyenlet együtthatóinak alakja a görögök által bevezetett ún. *homogenitás elvére* utal: hosszúság csak hosszúsággal, terület csak területtel, térfogat csak térfogattal adható össze.

Omar Khajjam egy szép megoldása.

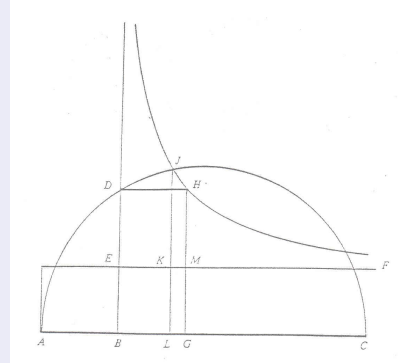
A szerkesztés előkészületei.

A párhuzamos szelők tételét használta.

- 1. Keressünk egy olyan z szakaszt, amelyre $b : a = a : z$.
- 2. Határozzunk meg egy olyan m szakaszt, amelyre $b : z = a : m$.
- 3. Világos, hogy $m = a^3/b^2$.

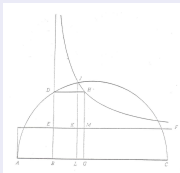
Omar Khajjam egy szép megoldása.

Ábra.



Omar Khajjam egy szép megoldása.

A szerkesztés.



- 1. Vegyük föl az $AB = m = a^3/b^2$ és a $BC = c$ szakaszokat egymás után.
- 2. Rajzoljunk egy félkört az AC szakasz mint átmérő fölé, és állítsunk rá merőlegest B-ben. Ez a félkört D-ben metszi.
- 3. A BD szakaszra mérjük föl a $BE = b$ távolságot, s húzzunk E-n keresztül egy EF párhuzamost az AC egyenessel.

Omar Khajjam egy szép megoldása.

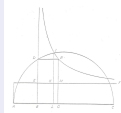
A szerkesztés.



- 4. A BC szakaszon szerkesszük meg azt a G pontot, amelyre $ED : BE = AB : BG$, majd rajzoljuk meg a DBGH téglalapot.
- 5. A H ponton át rajzoljunk egy olyan derékszögű hiperbolát (egyenlete $xy = const.$), amelynek aszimptotái az EF és ED egyenesek. Messe a hiperbola a félkört J-ben.
- 6. Húzzunk J-n keresztül párhuzamost DE-vel, s messe ez EF-et K-ban, BC-t L-ben. Messe a GH az EF-et M-ben.
- 7. Állítjuk, hogy BL a keresett x hosszúságú szakasz.

Omar Khajjam egy szép megoldása.

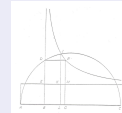
A bizonyítás.



- Mivel J, H a hiperbola pontjai, $(EK)(KJ) = (EM)(MH)$.
- $ED : BE = AB : BG$ maga után vonja, hogy $(BG)(ED) = (BE)(AB)$.
- Az előző két egyenlőségéből:
 $(EK)(KJ) = (EM)(MH) = (BG)(ED) = (BE)(AB)$.
- Mivel
 $(BL)(LJ) = (EK)(BE + KJ) = (EK)(BE) + (EK)(KJ) = (EK)(BE) + (AB)(BE) = (\text{az előbbi alapján}) = (BE)(EK + AB) = (BE)(AL)$,

Omar Khajjam egy szép megoldása.

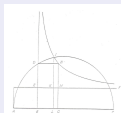
A bizonyítás.



- és így kapjuk, hogy $(BL)^2(LJ)^2 = (BE)^2(AL)^2$.
- Az elemi geometriából (magasságtétel) tudjuk, hogy $(LJ)^2 = (AL)(LC)$.
- Az előző két pont alapján $(BE)^2(AL) = (BL)^2(LC)$, vagyis $(BE)^2(BL + AB) = (BL)^2(BC - BL)$.

Omar Khajjam egy szép megoldása.

Konklúzió.



Rendezve az utóbbi egyenletet

$$(BL)^3 + b^2(BL) + a^3 = c(BL)$$

adódik, tehát a

$$BL = x$$

valóban megoldása a harmadfokú egyenletnek.