

AZ ÓKORI KÍNA ALGEBRÁJA.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2013. február 20.

Történelmi mérföldkövek.

- 1 **1550-1050 k.** A legkorábbi államalakulat a Hoang ho (Vörös folyó) völgyében, a **San-Jin** állam. Első írásos emlékek, bronzkori kultúra.
- 2 Létrejönnek a nagy vallásfilozófiai iskolák: **taoizmus** (VI. sz. Lao-ce), **konfucianizmus** (Konfuciusz, vagy Kung-ce megh. 479).
- 3 **220-209 k.** Csing Si Huang-ti legyőzi és egyesíti a „harcoló királyságokat”, császárként megalapítja a Kínai Birodalmat, **Csin dinasztia, 221-206.**
- 4 **Kr.e. 206-i.sz. 8.** Az első, a **korai Han-dinasztia.**
 - 1 Folytatódik a bürokratikus államrend kiépítése, szervezett hivatalnokképzés,
 - 2 terjedni kezd a konfucianizmus, később államvallássá válik,
 - 3 első kapcsolat az indiai és a perzsa kultúrával,
 - 4 a „Nagy Fal” építése a birodalom határán.

AZ ARITMETIKA MŰVÉSZETE KILENC KÖNYVBEN

- 1 Először az Kr.e. 179-körül (korai Han dinasztia) állították össze az I. évezred kínai matematikája összefoglalásaként.
- 2 A legrégebbi fennmaradt példány (egy szerkesztett változat) szerzője a III. század híres geométere **Liu Huj.**
 - 1 A matematikai ismeretek enciklopédiája az államszervezet hivatalnokainak szolgálatában.
 - 2 A célszemélyek: földmérők és építésszek, pénzügyi hivatalnokok és kereskedők, gazdálkodók és kézművesek.

A „Kilenc Könyv”.

Az egyes könyvek témaköre:

- 1. Területszámítás, számolás törtekkel.
- 2. II. A különböző szemes termények kölcsönviszonya (pl. tisztítatlan köles, durván földolgozott köles, tisztított köles, ..., fejedelemnek való köles). Lineáris határozatlan egyenletek, egyenletrendszerek.
- 3. III. Arányos osztások (pl. 3 szarvas húsának felosztása 5 különböző rangú hivatalnok között $5 : 4 : 3 : 2 : 1$ arányban.)
- 4. IV. **Sao kang.** Geometria problémák (pl. téglalap egy oldalának meghatározása a területből és a másik oldalból, kör-, ill. gömb átmérőjének meghatározása a területből ill. térfogatból).
- 5. V. A munkák értékelése: különböző falak, csatornák, gátak stb. (bonyolult alakzatok is) építéséhez szükséges munkások számának meghatározása.

A „Kilenc Könyv”.

Az egyes könyvek témaköre:

- VI. Arányos elosztás, benne véges sorok összegzése.
- VII. Többség és hiány.
- VIII. **Fang-cseng**, lineáris egyenletrendszerekre vezető problémák.
- IX. **Kou-kuba**, derékszögű háromszögekkel kapcsolatos feladatok.

A kínai számírás.

Tizes alapú és bizonyos helyiérték-szerű jegyeket hordoz. A számjegyeket pálcikákból (számolópálcák) rakták függőlegesen vonalazott táblára. Fölről lefelé írtak.

A számjegyek.

I	egy, száz, ..., 10^{2k} ,
II	kettő, kétszáz, ..., $2 \cdot 10^{2k}$,
III	három, ..., $3 \cdot 10^{2k}$,
IIII	négy, ..., $4 \cdot 10^{2k}$,
IIII	öt, ..., $5 \cdot 10^{2k}$,
┐	hat, ..., $6 \cdot 10^{2k}$,
┐┐	hét, ..., $7 \cdot 10^{2k}$,
┐┐┐	nyolc, ..., $8 \cdot 10^{2k}$,
┐┐┐┐	kilenc, ..., $9 \cdot 10^{2k}$,

A kínai számírás.

A számjegyek.

—	tíz, ezer, ..., 10^{2k+1} ,
==	húsz, kétezer, ..., $2 \cdot 10^{2k+1}$,
===	harminc, ..., $3 \cdot 10^{2k+1}$,
====	negyven, ..., $4 \cdot 10^{2k+1}$,
=====	ötven, ..., $5 \cdot 10^{2k+1}$,
┐	hatvan, ..., $6 \cdot 10^{2k+1}$,
┐┐	hetven, ..., $7 \cdot 10^{2k+1}$,
┐┐┐	nyolcvan, ..., $8 \cdot 10^{2k+1}$,
┐┐┐┐	kilencven, ..., $9 \cdot 10^{2k+1}$,

A kínai számírás.

A számjegyek.

Általában: „Az egyesek állnak, a tizedek fekszenek, a százaskok állnak és az ezresek ismét fekszenek...”

Egy példa.

- A

┐┐┐┐

jelsorozat

- a **6728** számot reprezentálja.

II. Könyv: határozatlan egyenletrendszerek.

38. Probléma.

576 pénzt fizettünk 78 bambuszrúderért. Mennyit vettünk a nagy- és a kis rúdból, és mennyit fizettünk az egyes rúdfajtákért?

Az eredmény.

48 nagy rudat és 30 kis rudat vettünk, az árak 8 és 7 pénz voltak.

A megoldás.

Mai szimbolikával, de követve az eredeti szöveges megoldást.

Megoldandó az

$$\begin{aligned}x + y &= 78 \\ px + qy &= 576\end{aligned}$$

egyenletrendszer, ahol x, y a rudak száma, p, q , $p > q$ az árak.

II. Könyv: határozatlan egyenletrendszerek.

A II/38. megoldása (folytatás).

- 1 $y = 78 - x$ -et helyettesítve a második egyenletbe

$$(p - q)x + 78q = 576.$$

- 2 Mindig föltételezték, hogy p, q egészek, továbbá $p - q = 1$ minden hasonló feladatban. Így a megoldandó egyenlet:

$$x + 78q = 576$$

- 3 Világos, hogy $x < 78$, így egyetlen (pozitív egész) megoldás adódik: q éppen az $576 : 78$ osztás hányadosa és x a maradék:
 $576 = 78 \cdot 7 + 30$, azaz

$$\begin{aligned}q &= 7 \\ x &= 30\end{aligned}$$

II. Könyv: határozatlan egyenletrendszerek.

Általában a 3. vagy a 4. probléma után adták csak meg a megoldási eljárást. Előtte csak az eredményt közölték.

VII. Könyv: A „többslet és hiány” módszere.

VII/1. Probléma.

Emberek egy csoportja közösen akar megvásárolni egy tárgyat. Ha mindegyikük 8 pénzt fizet, akkor 3 pénz a „többslet”, míg ha 7 pénzt fizetnek, akkor akkor 4 pénz a „hiány”. Hány ember akar vásárolni, és mennyi a tárgy ára?

A megoldás.

7 ember vásárol és 53 pénz a tárgy ára.

A számolás.

- Az emberek száma: $(3 + 4) : (8 - 7) = 7$
- Az ár az első szabály szerint: $(8 \cdot 4 + 7 \cdot 3) : (8 - 7) = 53$
- Az ár a második szerint: $7 \cdot 8 - 11 = 7 \cdot 7 + 4 = 53$.

VII. Könyv: A „többslet és hiány” módszere.

VII/2. Probléma.

Emberek egy csoportja közösen akar megvásárolni egy tyúkot. Ha mindegyikük 9 pénzt fizet, akkor 11 pénz a „többslet”, míg ha 6 pénzt fizetnek, akkor akkor 16 pénz a „hiány”. Hány ember akar vásárolni, és mennyi a tyúk ára?

A megoldás.

9 ember vásárol és 70 pénz a tyúk ára.

A számolás.

- Az emberek száma: $(11 + 16) : (9 - 6) = 9$
- Az ár az első szabály szerint: $(9 \cdot 16 + 6 \cdot 11) : (9 - 6) = 70$
- Az ár a második szerint: $9 \cdot 9 - 11 = 9 \cdot 6 + 16 = 70$

VII. Könyv: A „többslet és hiány” módszere.

VII/3. Probléma.

Emberek egy csoportja közösen akar megvásárolni egy „Chin-követ”. Ha mindegyikük $\frac{1}{2}$ pénzt fizet, akkor 4 pénz a „többslet”, míg ha $\frac{1}{3}$ pénzt fizetnek, akkor akkor 3 pénz a „hiány”. Hány ember akar vásárolni, és mennyi a kő ára?

A megoldás.

42 ember vásárol és 17 pénz a „Chin-kő” ára.

A számolás.

- Az emberek száma: $(4 + 3) : (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = 42$
- Az ár az első szabály szerint: $(\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 4) : (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = 17$
- Az ár a második szerint: $42 \cdot \frac{1}{2} - 4 = 41 \cdot \frac{1}{3} + 3 = 17$.

VII. Könyv: A „többslet és hiány” módszere.

VII/4. Probléma.

Emberek közösen vásároltak egy marhát. Ha minden család annyi pénzt adott, amennyi 190 pénzből 7 családra jutott, akkor a hiány 330 pénz. Ha minden család mindegyike annyit adott, amennyi 9 családra 270 pénzből jutott, akkor 30 pénz a többslet. Mennyi a marha ára, és hány család vásárolt?

A számolás.

- A családok száma: $(330 + 30) : (\frac{270}{9} - \frac{190}{7}) = 126$.
- Az ár az első szabály szerint: $(\frac{190}{7} \cdot 30 + \frac{270}{9} \cdot 330) : (\frac{270}{9} - \frac{190}{7}) = 3750$.
- Az ár a második szerint: $126 \cdot 30 - 30 = 126 \cdot \frac{190}{7} + 330 = 3750$.

VII. Könyv: A „többslet és hiány” módszere.

A megoldás elve: az első szabály.

- A többslet és a hiány együtt adják a megvásárolt dolgot.
- Fektesd le [a számológépre] a beadott összegeket, tedd alájuk a többsletet és a hiányt.
- Szorozd keresztbe az összegeket.
- Add össze, megkapod az osztandót.
- Add össze a többsletet és a hiányt, ez lesz az osztó. Ha törtet kaptál hozz közös nevezőre.
- Fektesd le a beadott összegeket, és vond ki a nagyobból a kisebbet, ez a különbség.
- Ezzel [a különbséggel] osszd el az osztót és az osztandót.
- Megkapod az árat és az emberek számát.

VII. Könyv: A „többslet és hiány” módszere.

A megoldás elve: a második szabály.

- Add össze a többsletet és a hiányt, ez az osztandó.
- A beadott összegeknél vond ki a nagyobból a kisebbet, a különbség az osztó.
- Végezd el az osztást.
- Megkapod az emberek számát.
- Ezzel szorozd meg az egyik kiadott összeget, és vedd el a többsletet, vagy add hozzá a hiányt.
- Megkapod a tárgy árát.

VII. Könyv: A „többslet és hiány” módszere.

Elemzés mai jelölésekkel 1.

Egy

$$a_1x - f_1 = y$$

$$a_2x + f_2 = y$$

alakú egyenletrendszert kell megoldani, ahol

- a_1, a_2 a beadott összegek,
- f_1, f_2 a többslet és a hiány.

VII. Könyv: A „többslet és hiány” módszere.

Az első szabály táblaképe (mai jelölésekkel).

a_1	a_2	$(a_1 > a_2)$
f_1	f_2	$(f_1 \text{ a többslet})$
$a_1f_2 + a_2f_1$		osztandó
$f_1 + f_2$		osztó
$a_1 - a_2$		különbség
$(a_1f_2 + a_2f_1) : (a_1 - a_2) = y$		a tárgy ára
$(f_1 + f_2) : (a_1 - a_2) = x$		az emberek száma

VII. Könyv: A „többslet és hiány” módszere.

Mit rejt e számolás?

- Az egyenletrendszer

$$a_1x - f_1 = y$$

$$a_2x + f_2 = y$$

- Az elsőből kivonva a másodikat

$$a_1x - a_2x = f_1 + f_2$$

$$x = \frac{f_1 + f_2}{a_1 - a_2}$$

VII. Könyv: A „többlet és hiány” módszere.

Mit rejt e számolás?

- Az egyenleteket f_2 , ill. f_1 -gyel szorozva majd összeadva

$$\begin{aligned}(a_1 f_2 + a_2 f_1)x &= (f_1 + f_2)y \\ y &= \frac{a_1 f_2 + a_2 f_1}{f_1 + f_2} \cdot \frac{f_1 + f_2}{a_1 - a_2} \\ y &= \frac{a_1 f_2 + a_2 f_1}{a_1 - a_2}\end{aligned}$$

VII. Könyv: A „többlet és hiány” módszere.

Az első szabály másképpen.

- Kifejezve mindkét egyenletből x -et kapjuk, hogy

$$\frac{y + f_1}{a_1} = \frac{y - f_2}{a_2},$$

- amiből közös nevezőre hozás után

$$y = \frac{a_1 f_2 + a_2 f_1}{a_1 - a_2}.$$

- Sajnos ez nem magyarázza meg a korabeli eljárás, túlzottan „mai” érvelés. Az első a valószínűbb.

VII. Könyv: A „többlet és hiány” módszere.

Második szabály táblaképe (mai jelölésekkel).

$f_1 + f_2$	osztandó
$a_1 - a_2$	osztó
$(f_1 + f_2) : (a_1 - a_2) = x$	az emberek száma
$x \cdot a_1 - f_1 = y (= x \cdot a_2 + f_2)$	a tárgy ára

VII. Könyv: A „többlet és hiány” módszere.

A második szabály.

- Az

$$\begin{aligned}a_1 x - f_1 &= y \\ a_2 x + f_2 &= y\end{aligned}$$

egyenletrendszerből

- $a_1 x - f_1 = a_2 x + f_2$,
- amit rendezve

$$x = \frac{f_1 + f_2}{a_1 - a_2}.$$

- y pedig valamelyik egyenletbe helyettesítéssel adódik.

VII. Könyv: A „többslet és hiány” módszere.

Mit kell tudni a szabályokhoz.

Ismerni kellett

- Azt, amit ma „mérlegelvnek” nevezünk,
- vagy amit ma „egyenlő együtthatók módszerének” nevezünk, azaz itt kivonjuk egymásból a két egyenletet.
- Valószínűbbnek tűnik az első föltételezés, bár...
- naivitás föltételezni egyrészt, hogy ez a mezopotámiai matematika hatása (távolság!)
- másrészt a „független fölfedezés”-re sincs igazán példa, vagy talán olykor ...?

VII. Könyv: „Mindkettő többslet”

A VII./5. Probléma.

Emberek közösen vásároltak aranyat. Ha mindenki beadott 400 pénzt, akkor a többslet 3400 pénz, míg ha mindenki 300 pénzt adott be, akkor a többslet 100 pénz. Hányan vásároltak, és mennyibe került az arany?

A válasz

33 ember vásárolt, az arany ára 9800 pénz.

A számolás.

- Az emberek száma: $(3400 - 100) : (400 - 300) = 33$.
- Az ár az első szabály szerint:
 $(300 \cdot 3400 - 400 \cdot 100) : (400 - 300) = 9800$.
- Az ár a második szabály szerint:
 $33 \cdot 400 - 3400 = 9800 = 33 \cdot 300 - 100$.

VII. Könyv: „Mindkettő hiány.”

A VII./6. Probléma.

Emberek közösen vásárolnak egy birkát. Ha mindenki öt pénzt adott, akkor 45 pénz a hiány, míg ha mindenki 7 pénzt adott, akkor a hiány csak 3 pénz. Hányan vásároltak és mennyi a birka ára?

A válasz

21 ember vásárolt, a birka ára 150 pénz.

A számolás.

- Az emberek száma: $(45 - 3) : (7 - 5) = 21$.
- Az ár az első szabály szerint: $(7 \cdot 45 - 5 \cdot 3) : (7 - 5) = 150$.
- Az ár a második szabály szerint: $21 \cdot 5 + 45 = 21 \cdot 7 + 3 = 150$.

VII. Könyv: Mindkettő többslet, mindkettő hiány.

A közös szabályuk 1.

- Mindkettő többslet vagy mindkettő hiány együtt adják ki a megvásárolt dolgot.
- Fektesd le a kiadott összegeket, ezek alá tedd a többsleteket vagy hiányokat.
- Szorozd őket keresztbe.
- A kisebbet vond ki a nagyobból. Ez a különbség lesz az osztandó.
- A kisebb többsletet vagy hiányt vond ki a nagyobbik többsletből vagy hiányból, ez lesz az osztó. ha törteket kaptál, hozz közös nevezőre.
- A kiadott összegek közül a nagyobból vond ki a kisebbet. Ez egy különbség lesz.

VII. Könyv: Mindkettő többlet, mindkettő hiány.

A közös szabályuk 1. (folytatás)

- Ezzel oszd el az osztót és az osztandót.
- Az elosztott osztandó az emberek száma, az elosztott osztó a dolog ára.

A közös szabályuk 2.

- Fektesd le a kiadott összegeket, a kisebbet vond ki a nagyobból, ez a különbség lesz az osztó.
- A nagyobb többletből vagy hiányból vond ki a kisebbet, ez a különbség lesz az osztandó.
- Oszd el az osztandót az osztóval, ez lesz az emberek száma.

VII. Könyv: Mindkettő többlet, mindkettő hiány.

A közös szabályuk 2. (folytatás)

- Ezzel szorozd meg a az egyik kiadott összeget és vond ki belőle a hozzá tartozó többletet, vagy add hozzá a hozzá tartozó hiányt.
- Ez a dolog ára.

Elemzés 1. (a táblakép mai jelölésekkel).

Ha x, y az emberek száma, ill. a tárgy ára, $a_1 > a_2$ a beadott pénzek, és $f_1 > f_2$ a hozzájuk tartozó többletek, ill. hiányok, akkor megoldandó egyenletrendszerek:

$$a_1x - f_1 = y$$

$$a_2x - f_2 = y$$

$$a_1x + f_1 = y$$

$$a_2x + f_2 = y$$

VII. Könyv: Mindkettő többlet, mindkettő hiány.

Első szabály.

a_1	a_2	beadott összegek
f_1	f_2	többlet-többlet
$a_2f_1 - a_1f_2$		osztandó
$f_1 - f_2$		osztó
$a_1 - a_2$		különbség
$(a_1f_1 - a_1f_2) : (a_1 - a_2) = y$		a tárgy ára
$(f_1 - f_2) : (a_1 - a_2) = x$		az emberek száma

VII. Könyv: Mindkettő többlet, mindkettő hiány.

Második szabály.

$f_1 - f_2$	osztandó
$a_1 - a_2$	osztó
$(f_1 - f_2) : (a_1 - a_2) = x$	az emberek száma
$f_1 - x \cdot a_1 = y$	az ár, mindkettő többlet
$x \cdot a_1 + f_1 = y$	az ár, mindkettő hiány

Az eljárás igazolható, de nyitott hogyan jöhetnek rá.

VIII. könyv: Kettőnél több határozatlanos egyenletrendszerek.

E könyvben 3 - 5 határozatlanos lineáris egyenletrendszerekre vezető problémák találhatók.

A VIII/1. Probléma.

3 jó kévéből, 2 közepes kévéből és 1 rossz kévéből 39 tau gabonát kapunk. 2 jó kévéből, 3 közepes kévéből és 1 rossz kévéből 34 tau gabonát kapunk. 1 jó, 2 közepes és 3 rossz kévéből pedig 26 tau gabonát. Mennyi gabonát kapunk 1 - 1 jó, közepes és rossz kévéből?

A válasz.

1 jó kévé $9\frac{1}{4}$ tau, 1 közepes kévé $4\frac{1}{4}$, 1 rossz kévé $2\frac{3}{4}$ tau gabonát ad.

VIII. könyv: Kettőnél több határozatlanos egyenletrendszerek.

A megoldás 1.

A tömör választ a némileg részletezett megoldás követte, a megfelelően kirakott számológép-képeket közölték kommentár nélkül. Az elv meglepő.

A táblák.

1	2	3	0	0	3	0	0	3
2	3	2	4	5	2	0	5	2
3	1	1	8	1	1	36	1	1
26	34	39	39	24	39	99	24	39

VIII. könyv: Kettőnél több határozatlanos egyenletrendszerek.

A megoldás 2.

$$\begin{aligned}\frac{99}{36} &= 2\frac{3}{4}, \\ (24 \cdot 36 - 99) : 5 : 36 &= 4\frac{1}{4}, \\ (39 \cdot 36 - 1 \cdot 99 - 2 \cdot 153) : 3 : 36 &= 9\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

VIII. könyv: Kettőnél több határozatlanos egyenletrendszerek.

A „modern” megoldás 1.

Ha x, y, z jelöli a jó, a közepes és a rossz kévék adta gabonát, akkor az

$$\begin{aligned}3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26\end{aligned}$$

egyenletrendszert kell megoldani. Ez megfelel az 1. Táblaképnek.

1. Táblakép

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

A „modern” megoldás 2.

2. táblakép.

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array}$$

Az egyenletrendszer.

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y + z & = & 39 \\ 5y + z & = & 24 \\ 4y + 8z & = & 39 \end{array}$$

A „modern” megoldás 3.

A 3. Táblakép.

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array}$$

Az egyenletrendszer.

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y + z & = & 39 \\ 5y + z & = & 24 \\ 36z & = & 99 \end{array}$$

A „modern” megoldás 4.

A megoldás.

Ezen utolsó egyenletrendszer már könnyen megoldható:

$$\begin{array}{l} \frac{99}{36} = 2\frac{3}{4} \\ (24 \cdot 36 - 99) : 5 : 36 = 4\frac{1}{4} \\ (39 \cdot 36 - 1 \cdot 99 - 2 \cdot 153) : 3 : 36 = 9\frac{1}{4}. \end{array}$$

Mit rejt e számolás?

- Bármennyire is meglepő az nem más, mint az, amit ma
- Gauss-elimináció néven ismerünk és kiterjedten használunk.
- Korabeli neve **Feng csen**.

A IX. könyv.

- Zömében derékszögű háromszögekkel kapcsolatos számításokat tartalmaz.
- Ezekben alapvető a Pithagorasz tétel.

A IX/11. Probléma.

Van egy ajtó, amelynek magassága 6 chih-vel és 8 tsun-nal több a szélességénél. Az egyik sarkától az átellenes sarokig 1 chang a távolság. Mennyi az ajtó magassága és szélessége.

Az eredmény.

A szélesség: 2 chih, 8 tsun, a magasság: 9 chih és 6 tsun.

A mértékegységek.

1 chang = 10 chih = 100 tsun.

A IX. könyv.

A probléma mai jelölésekkel.

Megoldandó az

$$\begin{aligned}x - y &= l = 6, 8 \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= d = 10\end{aligned}$$

egyenletrendszer, ahol x, y, d rendre a magasság, a szélesség és az átló.

A IX. könyv.

Az eredmény.

Az igen tömören fogalmazott szöveges megoldásból az olvasható ki, hogy az

•

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(d^2 - 2 \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right)} + \frac{l}{2} \\ y &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(d^2 - 2 \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right)} - \frac{l}{2}\end{aligned}$$

formulák szerint számoltak, és azt kapták, hogy

•

$$x = 9 \text{ chih és } 6 \text{ tsun} \quad y = 2 \text{ chih és } 8 \text{ tsun.}$$

A IX. könyv.

Elemzés 1.

Kérdés, hogyan kapták meg ezt a (korrekt) számolási módot. A könyv nem ad útbaigazítást. Támpontot adhat Jang Huj 1261-ben írott, a „*Kilenc könyv matematikai szabályainak részletes magyarázata és osztályozása*” c. kézírata.

Elemzés 2.

- Emeljük négyzetre a második egyenletet.
- Fejezzük ki x -et az első egyenletből és helyettesítsük a másodikba.
- Kapjuk a

$$2y^2 + 4 \left(\frac{l}{2} \right)^2 + 4 \frac{l}{2} y = d^2$$

másodfokú egyenletet.

A IX. könyv.

Elemzés 3.

Az egyenlet egy lehetséges (korabeli) megoldása:

- Kivonunk az egyenlőség mindkét oldalából $2 \left(\frac{l}{2} \right)^2$ -et,
- majd mindkét oldalt felezve kapjuk, hogy

$$\left(y + \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(d^2 - 2 \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right)^2$$

- Gyököt vonva mindkét oldalból

$$y = \sqrt{\frac{1}{2} \left(d^2 - 2 \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right)} - \frac{l}{2},$$

- végül

$$x = y + l.$$

A IX. könyv.

Kommentár.

A megoldás tetszetős, elképzelhető, hogy így kapták a megoldást, de figyelembe kell venni, hogy a kommentár legalább ezer évvel később született, mint az eredeti könyv. Ezért megfontolandó, hogy — hasonlóan az ókori mezopotámiaiakhoz — ők is inkább a Diophantos által **összeg-szorzat** módszernek nevezett követék-e.

Elemzés 4.

Ha ezt alkalmazzuk, akkor előbb egy új határozatlant kell bevezetni, x és y z számtani közepét. Ekkor

$$\bullet \quad x = z + \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad y = z - \frac{1}{2}.$$

- Ezt az eredeti második egyenlet négyzetébe (az ajtó átlójára fölírva a Pithagorasz tételt) helyettesítve a

A IX. könyv.

Elemzés 5.

$$\bullet \quad \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = d^2$$

- egyenletet kapjuk, amit egyszerű megoldani

$$2z^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = d^2$$

$$z = \sqrt{\frac{1}{2}\left(d^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)},$$

- ami után x és y azonnal adódik.

A IX. könyv.

Négyzetgyökvonás 1.

Hasonlóan a mezopotámiaiakhoz, e kérdés itt is megkerülhetetlen.

- A módszert szövegesen adták meg elmagyarázva, hogy hogyan kell a pálcikákat rakosgatni a számológéplán.
- Ez számunkra igen nehezen követhető, ezért — mint már többször is tettük — mai algebrai szimbolikával írjuk le módszerüket a $\sqrt{55.225}$ kiszámításán keresztül.
- Világos, hogy e feladat ekvivalens az

$$x^2 = 55.225$$

egyenlet pozitív gyökének meghatározásával.

A IX. könyv.

Négyzetgyökvonás 2.

- 1. lépés.** Meghatározzuk a gyök nagyságrendjét, ami 100, így a következő lépés a gyök „százasaival” meghatározása lesz.
- 2. lépés.** A százások meghatározásához legyen $x = 100x_1$ és $x_1 = p + y$, ahol $0 \leq p < 10$ egész, $0 \leq y < 1$. A

$$10.000x_1^2 = 55.225 \quad (1)$$

egyenlőségéből adódik, hogy $p = 2$, így $x_1 = 2 + y$.

- Helyettesítsük ezt (1)-be:

$$\begin{aligned} 10.000x_1^2 &= 10.000(2+y)^2 \\ &= 40.000 + 40.000y + 10.000y^2 = 55.225, \end{aligned}$$

- amiből

$$40.000y + 10.000y^2 = 15.225. \quad (2)$$

A IX. könyv.

Négyzetgyökvonás 3.

- **3. lépés.** A tizedesek meghatározásához legyen $10y = y_1$. Ezt (2)-be helyettesítve

$$4.000y_1 + 100y_1^2 = 15.225. \quad (2')$$

- Az előző lépéshez hasonlóan legyen $y_1 = q + z$, ahol $0 \leq q < 10$ egész és $0 \leq z < 1$.
- Mivel (2')-ből

$$(4.000 + 100q)q \leq 15.225,$$

kapjuk: $q = 3$ (hiszen ez a legnagyobb egész, amelyre az előbbi egyenlőtlenség teljesül), így $y_1 = 3 + z$.

A IX. könyv.

Négyzetgyökvonás 4.

- Ezt (2')-be helyettesítve

$$\begin{aligned} 15.225 &= 100(3 + z)^2 + 4.000(3 + z) \\ &= 900 + 600z + 100z^2 + 12.000 + 4.000z \\ &= 100z^2 + 4.600z + 12.900 \end{aligned}$$

A IX. könyv.

Négyzetgyökvonás 5.

- Ezt rendezve

$$100z^2 + 4600z = 2325. \quad (3)$$

- **4. lépés.** Az egyesek meghatározásához legyen $10z = z_1 = r$. Ezt (3)-ba helyettesítve

$$z_1^2 + 460z_1 = 2.325,$$

- amiből $z_1 = r = 5$. (Ezt vélhetően teljes négyzetté kiegészítéssel és gyökvonással kaphatták.)

Végeredmény:

$$\sqrt{55.225} = 100 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 = 235.$$