

A KÖZÉPKORI ÉS KORA ÚJKORI EUROLPA ALGEBRÁJA.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2013. március 27.

Dardi két további egyenlete.

Az eredeti listán a harmadik és a negyedik (negyedfokú) egyenletek:

- az $x^4 + 28x^2 + 720x = 20x^3 + 1800$ (A)
- és az $x^4 + 1120x = 20x^3 + 12x^2 + 2800$. (B)

Kérdés

Honnan származtak ezen egyenletek?

Dardi két további egyenlete.

Egy szöveges probléma

Osszuk a 10-et két részre úgy, hogy szorzatukat különbségükkel elosztva $\sqrt{g}$ -t kapunk.

A megoldandó egyenlet 1.

- Ha x jelöli az egyik részt, akkor

$$\frac{x(10-x)}{x-(10-x)} = \sqrt{g} \quad (*)$$

- Dardi két konkrét g értékre végzi el a számolásokat, előbb $g = 18$ -re, majd $g = 28$ -ra.
- Ha $g = 18$, akkor

$$\begin{aligned} x^2(10-x)^2 &= 18(2x-10)^2 & (1) \\ x^4 - 20x^3 + 28x^2 + 720x &= 1800. & (2) \end{aligned}$$

Dardi két további egyenlete.

A megoldandó egyenlet 2.

- Ha $q = 28$, akkor az

$$x^2(10-x)^2 = 28(2x-10)^2 \quad (3)$$

$$x^4 + 1120x = 20x^3 + 12x^2 + 2800 \quad (4)$$

egyenletet kapjuk.

- (2) és (4) éppen Dardi (A) és (B) egyenletei.

Az (A) egyenlet megoldása.

Dardi „képlete”:

$$x = \sqrt[4]{\left(\frac{c}{4}\right)^2 + n} + \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{d}{2b}} \quad (5)$$

Dardi két további egyenlete.

Elemzés 1.

- Rendezzük a másodfokú (*) egyenletet:

$$10x^2 = (2x - 10)^2 \sqrt{g} \quad (6)$$

- majd

$$x^2 - 2(5 - \sqrt{g})x = 10\sqrt{g}. \quad (7)$$

- Ennek megoldása

$$x = 5 - \sqrt{g} + \sqrt{(5 - \sqrt{g})^2 + 10\sqrt{g}} \quad (8)$$

$$x = 5 - \sqrt{g} + \sqrt{25 + g} \quad (9)$$

- Ha a (*) egyenletet négyzetre emeljük, akkor

$$x^2(10 - x)^2 = g(2x - 10)^2 \quad (10)$$

$$x^4 + (100 - 4g)x^2 + 40gx = 20x^3 + 100g \quad (11)$$

Dardi két további egyenlete.

Elemzés 2.

- Írjuk most ezen utóbbi egyenletet az (A)-nak megfelelő alakban (általános együtthatókkal):

$$x^4 + cx^2 + dx = bx^3 + n, \quad (12)$$

- ahol most

$$b = 20, \quad c = 100 - 4g, \quad d = 40g, \quad n = 100g. \quad (13)$$

- Ha ezeket Dardi (5) formulájába helyettesítjük, akkor

$$x = \sqrt[4]{(25 - g)^2 + 100g} + 5 - \sqrt{g}, \quad (14)$$

- ami éppen a (9) formula.

Dardi két további egyenlete.

Elemzés 3: van der Waerden ötlete

A kiindulópont: Vizsgáljuk meg: hogyan írhatjuk át a (9) megoldást a Dardi-féle (5) alakra, amelyekben speciális számok, mint az 5 (a problémában, röviden (P), szereplő 10 fele) és a g szerepel, amely 18, vagy 28 lehet, továbbá olyan értékek, amelyek a (13)-beli formulákkal kaphatók meg.

Elemzés 4.

- Vizsgáljuk tagonként a (9) formulát.

$$x = 5 - \sqrt{g} + \sqrt{25 + g} \quad (9)$$

- Az első tag 5, ami a (P)-beli 10 fele, a $b = 20$ pedig a 10 kétszerese.
- Így az első tag nem más, mint $\frac{b}{4}$. Ez pedig éppen az (5) második tagja.

Dardi két további egyenlete.

Elemzés 5.

- A (9) formula második tagja $\sqrt{g}$, ahol $g = 18, 28$ lehet, míg az eredeti egyenlet d együtthatója $40g$. Így, ha a d -t elosztjuk $2b = 40$ -nel, akkor éppen g -t kapunk, s ezáltal az (5) formula harmadik tagja

$$-\sqrt{\frac{d}{2b}} = -\sqrt{g}$$

lesz.

- Vizsgáljuk meg (5) első tagját, amely lényegesen bonyolultabb eset az előbbieknél.
- Induljunk ki abból, hogy Dardi a harmadfokú esethez hasonló formulát szeretne kapni, amelynél az első tag

$$\sqrt[3]{\text{valami plusz } n},$$

ahol az n a harmadfokú egyenlet jobb oldalán álló konstans tag.

Dardi két további egyenlete.

Elemzés 6.

- Ha Dardi mester itt is valami hasonló alakú megoldást szeretne kapni, akkor most a „valami plusz n ” negyedik gyökének kellene szerepelnie, s a (9)-ben ténylegesen ilyen áll.
- Ez úgy érhető el, ha a „valami” $\left(\frac{c}{4}\right)^2$ -nel egyenlő.
- Ekkor ugyanis azt kapjuk, hogy

$$\sqrt[4]{\left(\frac{c}{4}\right)^2 + n} = \sqrt[4]{(25 - g)^2 + 100g} \\ = \sqrt[4]{(25 + g)^2} = \sqrt{25 + g}$$

- ami éppen a (9) harmadik tagja.

Dardi két további egyenlete.

Konklúzió.

Mindezek csupán van der Waerden hipotézise alapján volt megfogalmazható. Hangsúlyozzuk, hogy (mindeddig) nem ismert Dardi mester eredeti gondolatmenete. Lehetett éppen az imént ismertetett, amiről azt bizton állíthatjuk, hogy megindokolja az eredményt. Vegyük azonban figyelembe, hogy gondolatmenetünk azért is viszonylag egyszerű, mert jelölésrendszerünk, írásmódunk támogatja azt. Dardi számára mindez nem állt rendelkezésre. Ezért vélhetően sokkal bonyolultabb, nehezebb gondolatmeneteket volt kénytelen alkalmazni.

Az algebrai szimbolizmus kezdete.

Luca Pacioli: Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità (1487)

- Megjelenik egy kezdetleges algebrai szimbolizmus.
- A négyzetgyök jele: R , vagy $R2$, a köbgyöké $R3$, a negyedik gyöké RR vagy $R4$. R a **radix** azaz gyök szóból ered.
- Az egyenlet határozatlanára a **c.** „cosa” jelölést, ennek négyzetére a **ce.** „censo”, további jelek: **cu.** **ce.ce.**
- Ha kellett még egy ismeretlen (határozatlan), annak neve „quantità”.
- Az összeadás és a kivonás jele: p , ill. m .
- Egy jelsorozat:

$$RV40mR320,$$

ami mai jelekkel: $\sqrt{40 - \sqrt{320}}$.

Harmad- és negyedfokú egyenletek: algebrai megoldás.

Harmadfokú egyenletek.

Vizsgálандók az

$$x^3 + px = q \quad (1. \text{ típus})$$

$$x^3 = px + q \quad (2. \text{ típus})$$

$$x^3 + q = px \quad (3. \text{ típus})$$

egyenlet típusok (minden együttható pozitív!!!).

Harmadfokú egyenletek: 1. típus.

- Scipione del Ferro (a Bologna-i Egyetem professzora) oldotta meg először, de vannak olyan nem explicit és bizonytalan nyomok hagyatékában, hogy a másik kettővel is boldogult (kérdéses?).
- Módszere az $x = u - v$ helyettesítésen alapult Cardano „Ars Magna”-ja (1545) szerint. Ferro 1526-ban halt meg.

Harmad- és negyedfokú egyenletek: algebrai megoldás.

Harmadfokú egyenletek: 1. típus.

- 1535: egyenletmegoldó verseny Tartaglia (Nicolo Fontana) és Ferro tanítványa Fior között 30 egymásnak kitűzött egyenlettel.
- Fior csupa (1) típusút adott föl, míg Tartaglia főleg (2) és (3) típusúakat.
- Tartaglia Fior összes feladatát megoldotta, míg Fior egyet sem, még az (1) típusúakat sem.
- Ennek ellenére Tartaglia megelégedett az erkölcsi sikerrel, a bankettre (30 személyes vacsorára) és a 30 dukátra nem tartott igényt.
- 1539-ben Cardano meghívta Tartagliát Milánóba, hogy megismerje módszerét. Ezt Tartaglia vélhetően elárulta, de megeskette Cardanot, hogy a módszerét titokban tartja. DE Ars Magna

Harmad- és negyedfokú egyenletek: algebrai megoldás.

Harmadfokú egyenletek: 2. típus.

- Tartaglia rájött: a (2) típus, mivel az $x^3 - px = q$ alakban is írható, Ferro módszerének kis módosításával kezelhető,
- csak itt az $x = u + v$ helyettesítést kell alkalmazni.
- Ugyanezt kell alkalmazni a (3) esetben is.

Harmad- és negyedfokú egyenletek: algebrai megoldás.

A vita.

- Cardano is rájött erre, vagy csak???
- Fior, Ferro és Nave ismeretlen kéziratára hivatkozott, amikor Cardano mindkét helyettesítést tárgyalta az „Ars Magna”-ban.
- Tartaglia élesen támadta és esküszegéssel vádolta. Az, hogy mi az igazság??? Megtalálható Ferro hagyatékában?? Erre semmiféle konkrét bizonyíték nincs, a hagyaték mára elveszett.
- DE annak, hogy már Ferro ismerte az általános eljárást ellentmond az a tény, hogy tanítványa Fior elvesztette a versenyt, nemhogy a (2) és (3), de még (1) típusú egyenletekkel sem boldogult.

Harmad- és negyedfokú egyenletek: algebrai megoldás.

Ferro észrevétele (Ars Magna).

- **Scipione del FERRO** észrevette, hogy az

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

általános harmadfokú egyenlet $y = x + \frac{1}{3}a$ helyettesítéssel

$$x^3 + px + q = 0$$

alakra hozható, így a már említett három típussal kell csak foglalkozni.

Harmad- és negyedfokú egyenletek: algebrai megoldás.

Cardano feladata az Ars Magnából.

- Legyen egy kocka és oldala hatszorosa 20.
- Megoldandó tehát az

$$x^3 + 6x = 20$$

egyenlet.

Harmad- és negyedfokú egyenletek: algebrai megoldás.

Ferronak tulajdonított módszer (Ars Magna).

- Helyettesítsünk: $x = u - v$ -t.
- Megoldandó az

$$\begin{aligned} x^3 + 6x &= (u - v)^3 + 6(u - v) \\ &= (u^3 - v^3) - 3uv(u - v) + 6(u - v) \\ &= 20. \end{aligned}$$

egyenlet.

- Láthatóan az $x = u - v$ megoldás, ha

$$u^3 - v^3 = 20 \quad (A)$$

$$3uv = 6. \quad (B)$$

Harmad- és negyedfokú egyenletek: algebrai megoldás.

Ferronak tulajdonított módszer (Ars Magna).

- Ezekből az

$$u^3 - v^3 = 20$$

$$u^3 v^3 = 8$$

egyenletrendszer adódik, aminek megoldása már az ókori Mezopotámiában is ismert volt.

- Az

$$r - s = P$$

$$rs = Q$$

alakú egyenletrendszer,

Harmad- és negyedfokú egyenletek: algebrai megoldás.

Ferronak tulajdonított módszer (Ars Magna).

- megoldása

$$\left(\frac{P}{2}\right)^2 + Q = \left(\frac{r+s}{2}\right)^2$$

- azaz

$$\begin{aligned} r &= \frac{r+s}{2} + \frac{r-s}{2} = \sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 + Q} + \frac{P}{2} \\ s &= \frac{r+s}{2} - \frac{r-s}{2} = \sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 + Q} - \frac{P}{2}, \end{aligned}$$

- ami alapján

$$u^3 = \sqrt{108} + 10 \quad \text{és} \quad v^3 = \sqrt{108} - 10,$$

- vagyis

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} + \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}.$$

Harmad- és negyedfokú egyenletek: algebrai megoldás.

Tartaglia módszere (2)-(3) típusok (Ars Magna).

- Tartaglia észrevette, hogy ugyanezzel a módszerrel — csak $x = u + v$ helyettesítéssel — a másik két típus is megoldható.

- Pl. (2)-t

$$x^3 - px = q$$

alakba átírva

$$x^3 - px = (u^3 + v^3) + 3uv(u + v) - p(u + v) = q,$$

- amiből

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= q \\ u^3 v^3 &= \left(\frac{p}{3}\right)^3 \end{aligned}$$

Harmad- és negyedfokú egyenletek: algebrai megoldás.

Tartaglia módszere (2)-(3) típusok (Ars Magna).

- és ismét a mezopotámiai módszerrel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} u^3 &= \frac{1}{2}q + w \\ v^3 &= \frac{1}{2}q - w, \end{aligned}$$

- ahol $w = \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 - \left(\frac{1}{3}p\right)^3}$, vagyis

$$x = u + v = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + w} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - w}$$

Harmad- és negyedfokú egyenletek: algebrai megoldás.

Zuanne de Tonini da COI feladata Cardano számára.

- Osszuk a 10-et három részre úgy, hogy azok folytonos arányban álljanak, s az első kettő szorzata 6 legyen.
- Vagyis megoldandó az

$$\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ xz &= y^2 \\ xy &= 6 \end{aligned}$$

egyenletrendszer,

- amely az

$$y^4 + 6y^2 + 36 = 60y$$

negyedfokú egyenletre vezet.

Harmad- és negyedfokú egyenletek: algebrai megoldás.

Ferrari eljárása.

- Alapja a geometriai úton igazolt

$$(s + a + b)^2 = (s + a)^2 + 2sb + 2ab + b^2$$

azonosság, amelyet Euklidész Elemek II.4. Tételének általánosításaként kapott.

- Ezt alkalmazva az

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$$

egyenlet mindkét oldalához hozzáadott $6x^2$ -et:

$$x^4 + 12x^2 + 36 = (x^2 + 6)^2 = 6x^2 + 60x.$$

Harmad- és negyedfokú egyenletek: algebrai megoldás.

Ferrari eljárása.

- Ezután megjegyzi: „Ha $6x^2 + 60x$ négyzet volna, megkapnánk a megoldást. Ezért mindkét oldalhoz elegendő négyzetet és számot adunk, hogy az egyik oldalon egy háromtagú összeg legyen, míg a másik oldalon levő gyöke vele egyenlő.”
- Ezután mindkét oldalhoz $2bx^2$ -et, majd egy alkalmas számot ad, amit a következőképp számol ki.

$$(x^2 + 6 + b)^2 = (x + 6)^2 + 2bx^2 + 12b + b^2,$$

- tehát mindkét oldalhoz adjunk hozzá

$$2bx^2 + 12b + b^2 - \text{et},$$

- így egyenletünk alakja

$$(x^2 + 6 + b)^2 = (2b + 6)x^2 + 60x + (b^2 + 12b)$$

Harmad- és negyedfokú egyenletek: algebrai megoldás.

Ferrari eljárása.

- Ezután b -t úgy kell megválasztani, hogy a jobb oldal egy $px + q$ alakú kifejezés négyzete legyen, vagyis

$$b^3 + 15b^2 + 36b = 450.$$

- Ez egy (1) típusú harmadfokú egyenletre vezet, aminek megoldása az ismert eljárással megy:

$$b = \sqrt[3]{190 + \sqrt{33903}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{33903}} - 5,$$

ami közelítőleg 4.

Egy furcsa eset.

Bombelli egyenlete.

- Megoldandó az

$$x^3 = 15x + 4 \quad (\text{B1})$$

egyenlet.

- Alkalmazva Cardano (Tartaglia) módszerét kapjuk, hogy

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \quad (\text{B2})$$

- De mit értsünk egy negatív szám négyzetgyökén?
- Cardano véleménye: a (B2) kifejezés **mesterkélt**, de az (B1) egyenlet egyáltalán nem lehetetlen, nem megoldhatatlan, hiszen az $x = 4$ egy megoldás.
- Kérdés: Milyen értelmet adjunk (B2)-ben a negatív szám négyzetgyökének, hogy megkapjuk a gyököt, az $x = 4$ -et?

Egy furcsa eset.

Bombelli megoldása 1.

- A megoldandó kérdés: milyen p, q számokra teljesülhet, hogy

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = p + \sqrt{-q}. \quad (\text{C1})$$

- Mindkét oldalt köbre emelve:

$$2 + \sqrt{-121} = (p^3 - 3pq) + (3p^2 - q)\sqrt{-q},$$

- amely akkor teljesül, ha

$$2 = p^3 - 3pq \quad (\text{C2})$$

$$\sqrt{-121} = (3p^2 - q)\sqrt{-q}. \quad (\text{C3})$$

Egy furcsa eset.

Bombelli megoldása 2.

- Hasonlóan kapható, hogy

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = p - \sqrt{-q}. \quad (\text{CI4})$$

- Összeszorozva (CI1)-et és (CI4)-et:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{125} &= p^2 + q \\ 5 &= p^2 + q\end{aligned}$$

- amiből

$$q = 5 - p^2. \quad (\text{CI5})$$

- Ha behelyettesítjük (CI5)-öt (CI2)-be, p -re egy harmadfokú egyenletet kapunk:

$$4p^3 - 15p = 2,$$

amelynek gyöke $p = 2$.

Egy furcsa eset.

Bombelli megoldása 3.

- A $p = 2$ -t visszahelyettesítve (CI5)-be a $q = 5 - 4 = 1$ megoldás jön, tehát

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} \quad \text{és} \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$$

- ami azt jelenti, hogy az egyenlet megoldása

$$\begin{aligned}x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ &= 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} \\ x &= 4.\end{aligned}$$

Egy furcsa eset.

Bombelli vélekedése.

Először a dolgok olybá tűntek előttem, hogy bennük több a mesterkélttség, mint az igazság, de addig kutattam, míg megtaláltam a bizonyítást.

Bombelli új terminológiája.

- più di meno*, ill. *meno di meno*,
- ami mai jelöléssel i és $-i$,
- egy összefüggés: *meno di meno uia men di meno fà meno*,
- azaz $(-i)(-i) = -1$.

Mai terminológiával.

i egy olyan szimbólum, amelynek négyzete -1 .

Egy furcsa eset.

A további gyökök.

$$x = -2 \pm \sqrt{3}$$

Egyszerű észrevétel.

- Ha 3 valós gyök van, mindig előjön ez a probléma,
- azaz, ha 3 valós gyök van, akkor azok nem kaphatók meg csak valós számokkal dolgozva.
- Bombelli: **casus irreducibilis**, azaz „visszavezethetetlen eset”.

Hogyan tovább?

Fontos észrevétel.

- Az már rég óta ismert, hogy a másodfokú egyenlet megoldása visszavezethető egy elsőfokúéra. Az imént láttuk, hogy a harmadfokú egyenlet megoldása másodfokú, míg a negyedfokú egyenlet megoldása harmadfokú egyenletre vezethető vissza.
- **Kérdés.**
- **Magasabb kitevőkre is ugyanez igaz?**