

## AZ EURÓPAI ALGEBRA KEZDETE.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2013. március 6.

## Az európai civilizáció kezdete (a nem görög területeken).

### A folyammenti kultúrák kora.

- Kevés kivétellel primitív törzsek lakják, zömmel gót és germán törzsek.
- TACITUS: nyílt, vendégszerető, nyughatatlan, iszákos és feleségeikre büszke népek.

### Az ókor vége, a korai középkor.

- 253-tól a Római Birodalom erjedése, lassú fölbomlása, keresztényüldözések. Kialakul lassan a két császárság, a két birodalom.
- Népvándorlás a I.sz. IV. századtól: hunok, avarok; támadások Róma ellen.
- 381: II. egyetemes konstantinápolyi zsinat, a keresztény hitvallás végleges megfogalmazása.
- 391: a kereszténység államvallás a keleti birodalomban.

## Az ókor vége, a korai középkor.

- 434-452: Attila hódításai, a Hun Birodalom az Uraltól a Rajnáig terjed, a központ a Kárpát medencében.
- 451: a Catalaunum-i csata, elvezet a Nyugatrómai Birodalom bukásához.
- 451-511: Klodvig király: a Frank Állam megalapítása.
- 529: A nyugati szerzetesség megalapítása, Nursiai Benedek kolostort alapít Monte Cassinon, Benedek rend.
- További rendek, kolostorok, bennük **Iskolák**.
- A VIII. századtól az egyes (világi) uralkodók is iskolákat alapítanak, de ezek is egyházi vezetésűek. Nagy Károly meghívja iskolájába a yorki **Alcuin**-t. A fő tantárgy a teológia, de megkezdődik más diszciplinák oktatása is, elsősnek a zene.

## Az első egyetemek.

- Bologna 1088, Párizs 1150, Oxford 1167, Salamanca 1239, Krakkó 1364, továbbiak a XII-XV. században: Bázél, Bécs, Heidelberg, Lipcse, Prága és Salerno.
- Egyik sem független az egyháztól.
- Az oktatás nyelve a **latin**, mivel ez a katolikus egyház hivatalos nyelve. Általánosan ez marad a XVIII. századig.

### Az elérhető ismeretanyag.

- Kezdetben csak latin (római) forrásokra támaszkodik.
- A római matematika igen kezdetleges (számírás!), egyszerű és praktikus aritmetika csupán.
- Elérhető néhány görög mű, de nem autentikus, alacsony színvonalú latin fordításban.

## A továbblépés kezdete.

### Az első ismert tudósok.

- SEVERINUS BOETIUS (480-524, ősi római család sarja), az első nem iszlám tudós, aki eredeti görög források alapján **traktátusokat** állít össze elemi aritmetikából és geometriából.
- Euklidész I. és II. könyvét fordította, de a bizonyításokat elhagyta. Mellékelte néhány (részben hibás) geometriai számítást. Pl. nem utalt azok közelítő jellegére.
- Nikomachosz Aritmetikáját, Arisztotelész, K. Ptolemaiosz egyes műveit is fordította.
- Keveset érthet meg a lefordított művekből, matematikája tisztán empirikus.
- Leghíresebb műve: Consoliones Philosophicae, amit gyaníthatóan fogsága (hitzegés) alatt írt.
- **Gerbert** (~940-1003) és **ALCUIN** (735-804) néhány traktátusa (ők már mecsetiskolákban tanultak).

## Gerbert.

- 930 és 945 között született Auvergne-ben,
- hispániai mecsetiskolákban (Cordoba, Sevilla) is tanult,
- 977 és 982 között Reims-ben a quadrivium (aritmetika, geometria, csillagászat, zene) előadója,
- matematikával, logikával, filozófiával és csillagászzal foglalkozott,
- legfontosabb matematikai műve: **Libellus de numerorum divisione**, XII. századi másolatban maradt fenn,
- a hindu-arab számjegyek használatát javasolta (eretnekség számba ment!)
- $\sqrt{3} \approx \frac{12}{7}$ ,
- 998 - 1003 II. Szilveszter.

## A tudományosság megjelenése.

### A görög alapok föléledése.

- Az európai (feudális alapú) civilizáció megerősödése 1100-tól, az államrendszer stabilizálódása.
- Az első manufaktúrák, kereskedelmi kapcsolatok az államokon belül és között, keleti kapcsolatok.
- Az „ülő kereskedők” megjelenése, „kereskedelmi kirendeltségek” létrejötte. Hitelezések.
- Kapcsolat a „hispániai mór államokkal”: tudomány, mecsetiskolák.
- **Roger Bacon** (1214-94): az első tudós, akit „eltiltottak az írástól”, de pápai megbízásból filozófiával foglalkozhatott. Ő — ellentétben legtöbb kortársával — előnyben részesítette a kísérleteket a spekulációval (skolasztika) szemben.

## A pisai Leonardo (1170-1250).

### Tanulmányai, utazásai, művei .

- Tanulmányok: mecsetiskolák, keleti utazások, Palermo.
- Művei: Liber abaci (1202, 1228), Practica geometrie (1220), Flos (1225) és Liber quadratorum (1225).

### A könyvek címeiről:

- Liber abaci → Abakusz könyve, vagy inkább a Számolások könyve (abacus vagy abare az abaci eredete?),
- Flos „Virágocská”, zömmel gazdasági számításokat tartalmaz, de néhány elméleti problémát is.
- **Liber quadratorum** → Négyzetszámok könyve (Sain Márton???)

## Feladatok a Liber abaciból.

### Bevezető megjegyzések.

- Számolások a hindu-arab számjegyekkel, a mai értelemben vett törtek és az egységtörtek (az 1 számlálójú törtek) közötti konverzió.

$$\frac{98}{100} = \frac{1}{50} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2},$$

- Egy érdekes jelölésrendszere:

$$\frac{1\ 6\ 2}{2\ 9\ 10} = \frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 10} + \frac{6}{9 \cdot 10} + \frac{2}{10}.$$

- Egy érdekes feladat.** 7 anyóka mendegél Róma felé, minden anyókéval mendegél 7 öszvér, minden öszvéren 7 zsák van, minden zsákban 7 kenyér van, minden kenyér mellett 7 kés van, minden kés 7 tokban van. Mennyi mindezek összege?

## Hasonló feladatok más kultúrákban 1.

### RHIND 79. feladat. (i.e. 20-19. sz.)

- Van 7 ház, 49 macska, 343 egér, 2401 kalász, 16807 búzaszem.
- Valószínűleg a következő feladatról van szó:
- Ha van 7 ház, minden házban 7 macska, minden macska megeszik 7 egeret, minden egér elpusztítana 7 kalászt, és minden kalászban 7 mag van, akkor hány szem gabona menekül meg?

### Középkori orosz kézirat. (i.sz. 15. század)

Gyalogol 7 anyóka, minden anyókánál 7 bot van, minden boton 7 ágacska, minden ágacsán 7 tarisznya, minden tarisznyában 7 lepény, minden lepényben 7 veréb, minden verébben 7 zúza. Mennyi ez összesen?

## Hasonló feladatok más kultúrákban 2.

### Ismert angol nonszensz-vers (nursery rhyme) a 19. századból.

As I was going to St. Ives,  
I met a man with seven wives;  
Every wife had seven sacks,  
Every sack had seven cats,  
Every cat had seven kits,  
Kits, cats, sacks, and wives,  
How many were going to St. Ives?

## Feladatok a Liber abaciból.

### Amit mindenki ismer.

A „nyulas” probléma: Hány pár nyúl jön a világra egy év alatt, ha kezdetben egyetlen párunk van, és minden egyes hónapban minden pártól egy újabb pár születik föltéve, hogy a párok a második hónaptól kezdődően produktívak.

### Határozatlan egyenletekre vezető problémák.

**A 30 madár probléma.** Egy ember 30 madarat vásárol: foglyokat, galambokat és verebeket. A fogoly ára darabonként 3 ezüst, a galamboké 2, míg a verebeké  $\frac{1}{2}$ . Összesen 30 ezüstöt fizet. Hány madarat vett az egyes fajtaiból?

### Megjegyzés.

E feladat egy variánsa az ókori kínai, hindu, valamint a kora-középkori arab forrásokból is ismert **100 madár problémának**.

## Feladatok a Liber abaciból.

### A megoldás.

Mai terminológiával: az

$$\begin{aligned}x + y + z &= 30 \\ 3x + 2y + \frac{1}{2}z &= 30\end{aligned}$$

határozatlan egyenletrendszert kell megoldani, amelyből

$$x = 3, y = 5, z = 22$$

### Még egy határozatlan egyenletre vezető probléma.

**Lóvásárlási probléma:** Az egyik ember azt mondja a másiknak: ha nekem adod pénzed egyharmadát, akkor meg tudom venni a lovat. Erre a másik úgy válaszol, hogy ha te pedig a pénzed negyedét adod nekem, akkor én tudom megvenni a lovat.

## Feladatok a Liber abaciból.

### A megoldás.

- Jelölje  $s$  a ló árát,  $x$  és  $y$  pedig az emberek pénzét.

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{3}y &= s \\ y + \frac{1}{4}x &= s\end{aligned}$$

- A legkisebb egész megoldás:

$$\begin{aligned}x &= (3 - 1) \cdot 4 = 8 \\ y &= (4 - 1) \cdot 3 = 9 \\ s &= 3 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 11\end{aligned}$$

## Feladatok a Liber abaciból.

### A lóvásárlási probléma általánosítása.

A vásárlásban hárman vesznek részt, mindenki a másik kettőtől kér pénzt azonos arányban.

### A megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{3}(y + z) &= s \\ y + \frac{1}{4}(x + z) &= s \\ z + \frac{1}{5}(x + y) &= s\end{aligned}$$

$x, y, z$  jelöli az emberek pénzét,  $s$  a ló ára.

## Feladatok a Liber abaciból.

### A szöveges megoldás formalizálása

- Általános vonások/technika fedezhető föl.
- Legyen

$$x + y + z = t,$$

azaz egy „új határozatlant vezetett be.”

- Ebből az egyenlőségéből sorra kivonja az egyenleteket:

$$\frac{2}{3}(y + z) = \frac{3}{4}(x + z) = \frac{4}{5}(x + y) = t - s = D,$$

Feladatok a Liber abaciból.

A megoldás folytatása.

- azaz „egyenletrendszer”

$$\begin{aligned}y + z &= \frac{3}{2}D \\x + z &= \frac{4}{3}D \\x + y &= \frac{5}{4}D\end{aligned}$$

- $x, y, z$ -re egész értéket akar kapni, ezért  $D = 24$ -gyel számolt,
- 

$$\begin{aligned}y + z &= 36 \\x + z &= 32 \\x + y &= 30\end{aligned}$$

Klukovits Lajos (TTIK Bolyai Intézet)Európa2013. március 6.17 / 36

Feladatok a Liber abaciból.

A végeredmény

$x = 13, y = 17, z = 19.$

Megjegyzés.

Megjegyezzük, hogy a 3 szereplős lóvásárlási probléma „egyenletrendszerénk” illetén megoldása szerepel Diophantos Arithmetica c. könyvében (I. 24 feladat).

Palermoi János egy problémája.

Flos.

Megoldandó az  $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$  egyenlet.

Leonardo megoldása 1.

$x \notin \mathbb{N}$ , mert

$$x + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{10} = 2,$$

amiből egyrészt  $x < 2$ , másrészt  $1^3 + 2 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 = 13 < 20$ .

Leonardo megoldása 2.

$x \notin \mathbb{Q}^+$ , sőt racionális szám négyzetgyöke sem lehet, mert az egyenlet

$$x = \frac{20 - 20x^2}{10 + x^2}$$

alakban is írható, és a jobb oldalon ez esetben racionális, míg a bal oldalon irracionális szám állna.

Palermoi János egy problémája.

Leonardo megoldása 3.

Megmutatta be (nem korrekten), hogy  $x$  nem lehet kvadratikuss irracionális, azaz  $\sqrt{a + \sqrt{b}}$  alakú szám sem.

Leonardo megoldása 4.

- Megadta az egyenlet egy közelítő megoldását hatvanados törtekkel:

$$\begin{aligned}x &= 1; 22, 7, 42, 33, 4, 40 \\&= 1 + \frac{22}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{42}{60^3} \\&\quad + \frac{33}{60^4} + \frac{4}{60^5} + \frac{40}{60^6}.\end{aligned}$$

- Ez decimálisan

$1,36883102451989026063100137174211$

## Palermoi János egy problémája.

### Megjegyzések.

- 1 Ezen érték  $3 \cdot 10^{-11}$  pontosságú, csak a hatodik hatvanados jegy nagyobb a korrektnél kb. másfélszer.
- 2 Pontatlansága ellenére kijelenthetjük, hogy ez volt az első komoly kísérlet a harmadfokú egyenletek gyökjelekkel való, tehát algebrai megoldására.
- 3 Más írásaiból azonban az tűnt ki, hogy osztotta az iszlám tudósok, így Omar Khajjam, azon véleményét, hogy a harmad- és magasabb fokú egyenletek csak geometriailag oldhatók meg egzaktan.
- 4 Előbbi eljárásában implicit az is benne van, hogy Euklidész X. könyve nem írja le az összes algebrai irracionális, hiszen egyenletének nincs megoldása az ott tárgyalt  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ , illetve  $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$  alakú irracionálisok körében.

## Részleges algebrai megoldások

### Egy XIV. századi kézirat.

- A pisai Dardi mester valamikor 1344 körül írta **Aliabrea di algibra** c. traktátusát (címéből megítélhetően vulgáris olasz nyelven).
- E műnek négy középkori kézírata ismert, három olasz nyelvű és egy 1473-as keltezésű héber fordítás.
- Traktátusában Dardi igen hosszú listát adott egyenletek típusairól, amelyben bőségesen találunk olyanokat amelyek az ismeretlen négyzet- vagy köbgyökét is tartalmazta.
- Az egyes típusok megoldási eljárását nem minden esetben részletezte, gyakran csak rövid hivatkozásokat írt le.
- Arról nem találunk semmit, hogy hogyan jöhetett rá a szóvegesen leírt megoldási eljárásokra, és eljárásait természetesen nem bizonyította.

## Részleges algebrai megoldások

### 4 közbeiktatott egyenlet.

- A listán a 182. és a 183. egyenlet közé négy speciális alakú irreducibilis vegyes harmadfokú és negyedfokú egyenletet illesztett:

$$cx + bx^2 + ax^3 = n \quad (1)$$

$$dx + cx^2 + bx^3 + ax^4 = n \quad (2)$$

$$dx + cx^2 + ax^4 = n + bx^3 \quad (3)$$

$$dx + ax^4 = n + cx^2 + bx^3 \quad (4)$$

- A listán szereplő egyenletekben természetesen csak pozitív együtthatók szerepeltek, és a megoldást mindig azzal kezdte, hogy az ismeretlen legmagasabb hatványának együtthatójával elosztotta az egyenletet.

## Részleges algebrai megoldások

### Az (1) egyenlet megoldása.

- A megoldandó egyenlet:

$$x^3 + bx^2 + cx = n, \quad (1')$$

- amelynek megoldását az

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{c}{b}\right)^3 + n - \frac{c}{b}} \quad (5)$$

formula szolgáltatja.

- Természetesen „formula” alatt nem az előbbi alakút kell érteni, e korban még a jelek jelentős részét is szavakkal adták meg, és az ismeretlent sem egyetlen betűvel jelölték.
- Nagy kérdés azonban az, hogy hogyan jött rá Dardi mester e formulára.

## Részleges algebrai megoldások

### Az (1) egyenlet megoldása.

- Pontos válasz nyilván nem adható, hacsak nem kerül elő egy ezt tartalmazó Dardi kézirat. Ezért itt van der Waerden gondolatait vesszük alapul.
- Al-Hvárizmi és a pisai Leonardo az  $x^2 + bx = c$  alakú egyenleteknél úgy járt el, hogy — alkalmas konstanszt adva mindkét oldalhoz — a bal oldalt teljes négyzeté egészítette ki:

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = c + \frac{b^2}{4}.$$

- Al-Hvárizmi algebrájának anyaga és módszerei ismertek voltak, és Dardi olvashatta (ismerhette) Leonardo műveit föltételezhetjük, hogy az azokban szereplőkhöz hasonló utat követett.

## Részleges algebrai megoldások

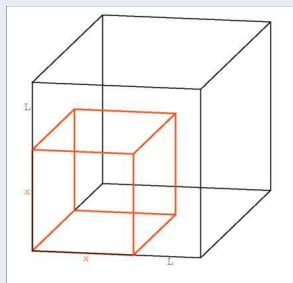
### Az (1) egyenlet megoldása.

- Dardi mester tehát mindkét oldalhoz olyan  $L$  mennyiséget adott, hogy a bal oldalon teljes köb alakuljon ki, azaz  $(x + L)^3$  álljon.
- A korábbi eljárás akármilyen együtthatók esetén alkalmazható, most ezt nem várhatjuk, csak korlátozott érvényű általánosításra van lehetőségünk. Vizsgálni kell a módszer alkalmazhatóságának föltételeit is.
- Mind az arab, mind Leonardo a másodfokú egyenletek megoldására alkalmazott eljárásaik illusztrálásaként, „bizonyításaként” négyzeteket alkalmazott, így esetünkben — harmadfokú egyenletnél — kockát kell használnunk.

## Részleges algebrai megoldások

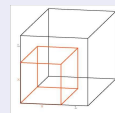
### van der Waerden rekonstrukciója.

Tekintsünk egy  $x + L$  oldalélű kockát.



## Részleges algebrai megoldások

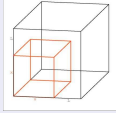
### van der Waerden rekonstrukciója.



- A kocka 8 részre bontható:
- egy  $x$  oldalélű kocka,
- három olyan négyzet alapú hasáb, amelynek alapéle  $x$ , magassága pedig  $L$ ,
- három olyan négyzet alapú hasáb, amelynek alapéle  $L$ , és magassága  $x$ ,
- egy  $L$  oldalélű kocka.

## Részleges algebrai megoldások

### van der Waerden rekonstrukciója.



- Egy-egy említett test térfogata rendre

$$x^3, x^2L, xL^2, L^3,$$

s természetesen az is teljesül, hogy

$$(x + L)^3 = x^3 + 3x^2L + 3xL^2 + L^3.$$

## Részleges algebrai megoldások

### van der Waerden rekonstrukciója.

- Meg kell vizsgálni, hogy egyenletünk együtthatóinak milyen speciális föltételeket kell kielégíteniük ahhoz, hogy alkalmazhassuk módszerünket.
- Egyrészt egyenletünk mindkét oldalához hozzá kell adni  $L^3$ -t,
- másrészt fönn kell, hogy álljanak a

$$c = 3L^2 \quad (6)$$

$$b = 3L \quad (7)$$

egyenlőségek.

- Ezek közül (7) könnyen teljesíthető, hiszen eddig  $L$ -re nem volt kikötésünk. Ha elosztjuk (6)-ot (C)-tel, akkor

$$L = \frac{c}{b}$$

## Részleges algebrai megoldások

### van der Waerden rekonstrukciója.

- Ez azt jelenti, hogy eljárásunk olyan  $b, c$  együtthatók esetén alkalmazható, amelyekre fönnáll (6) és (7), azaz

$$b^2 = 3c.$$

- Ha ez teljesül, akkor (1') egyenletünk

$$(x + L)^3 = n + L^3$$

alakúra hozható, s így

$$x = \sqrt[3]{n + L^3} - L = \sqrt[3]{n + \left(\frac{c}{b}\right)^3} - \frac{c}{b}.$$

## Részleges algebrai megoldások

### Dardi példája.

Dardi mester eljárását az

$$x^3 + 60x^2 + 1200x = 4000 \quad (1')$$

egyenleten szemléltette. Azonnal láthat, hogy — mindkét oldalhoz 8000- t adva a bal oldalon az  $x + 20$  kifejezés köbe áll, tehát az

$$(x + 20)^3 = 4000 + 8000 = 12000$$

egyenlethez jutunk, ami már könnyen megoldható.

## Dardi példájának (lehetséges) eredete.

### Piero della Francesca: Trattato d'Abaco.

- A híres reneszánsz festő matematikai traktátusában szerepel a következő probléma.
- *Egy ember kölcsön ad a másíknak 100 Lirát, és 3 év múlva, kamatos kamatot számolva 150 Lirát kap vissza. Mennyi volt a havi kamat?*
- A feladat megoldásában a havi kamatot „denarii”-ban fejezték ki, 1 Lira az  $20 \times 12$  denarii.
- Ha most a havi kamat 1 Lirára  $x$  denarii, akkor az éves kamat  $12x$  denarii 1 Lirara, s így az éves kamatláb  $\frac{x}{20}$ .

## Dardi példájának (lehetséges) utóélete.

### Piero della Francesca: Trattato d'Abaco.

- Mindezek alapján az  $x$  havi kamatra a következő egyenlet írható föl.

$$100 \left(1 + \frac{x}{20}\right)^3 = 150,$$

vagy ezt 80-nal szorozva

$$(x + 20)^3 = 12000,$$

- ami éppen Dardi (1') egyenlete.
- A traktátusában három kölcsönügyletet is tárgyalt, és ezek közül kettő (az egyik az előbbi) — ráadásul ugyanazon számokkal — szerepel Dardinál is.

## Dardi példájának (lehetséges) utóélete.

### Piero della Francesca: Trattato d'Abaco.

- A második probléma a következő.
- Ugyancsak 100 Lirát, de most 4 hónapra adunk kölcsön, s a határidő lejártával 160 Lirát kapunk vissza. Ismét az egy Lirára számított havi kamat a kérdés.
- A megoldáshoz — az előbbinek megfelelő gondolatmenet alapján — most az
$$(x + 20)^4 = 256000$$
egyenletet kell megoldani,
- ami ismét egy egyszerű gyökvonás.

## Dardi példájának (lehetséges) utóélete.

### Piero della Francesca: Trattato d'Abaco.

- Ha a bal oldalon elvégezzük a hatványozást, akkor az

$$x^4 + 80x^3 + 2400x^2 + 32000x = 96000$$

egyenlethez jutunk, mely szintén szerepel Dardi példái között.

- Valószínű, hogy Francesca Darditól vette példáit.