

BEVEZETŐ GONDOLATOK AZ  
ALGEBRA TÖRTÉNETE  
HAMMURAPITÓL G. BIRKHOFFIG

C. KURZUSHOZ.

Klukovits Lajos

TTIK Bolyai Intézet

2013. február 6.

## Honnan ered az ALGEBRA kifejezés 1.

1. Al-Manszur (754-775), Hárún ar-Rasid (786-809) és al-Mámun (813-833) kalifák tudósokat gyűjtöttek Bagdadba, előbb Könyvtárat alapítottak majd az ún. Bölcsesség Házát (alexandriai mintára)
2. A tudósok első generációjához tartozott a Horezmből származó MUHAMMAD AL-KHWARIZMI, aki valamikor 780 és 850 között élt. Mámun idején került a Bölcsesség házába.
3. Előbb egy aritmetikai traktárust állított össze, majd egy hosszú (némileg megtévesztő) címűt, amelyben jelentős részt szentelt az iszlám örökösödési joggal — elsősorban a végrendeletekkel — kapcsolatos számításoknak. A mű rövid címe: AL-KITÁB AL-MUKTASZAR FÍ-SZIHÁB AL-DZSABR VAL-MUKÁBALA, magyarul: Rövid könyv a dzsabr és a mukabala számításokról.

## Honnan ered az ALGEBRA kifejezés 2.

### Nyelvészeti megközelítés.

Nyelvészek az **al-dzsabr** (amely az ún. nyugati arab nyelvben al-gebr) szóból származtatják a mai „algebra” szót, aminek alapot ad, hogy Khwarizmi művének első latin fordítása címében szerepel e szó „**aliebra**”-ként.

1. Az al-dzsabr és a **val-mukábala** szó pontos jelentéséről viták folytak és folynak, most csak annyit, hogy az előbbi **kiegészítés/összeillesztés**-nek, az utóbbit **összevonás**-nak fordíthatjuk.
2. Ezek alapján a középkori itáliai matematikusok és számolómesterek algebra (algibra) néven emlegették az egyenletek megoldásának tudományát.

## Az algebra tárgya 1.

A matematikában a szimbólumok használata a XV. században kezdődött, korábban mindent szóvegesen írtak le. Ez időtől kezdve az algebra szó jelentése kiszélesedett, magába foglalta a szimbólumokkal való számolásokat. Ez az alapja annak hogy a nyelvújítás korában magyarra **betűszám**tan-ként „fordították” le. Ezt középiskolai tankönyvekben még a múlt század 30-as éveiben is olvashattuk.

- ▶ A XIX. századig
  - ▶ az egyenletek elmélete (visszahatóan a Khwarizmi előtti időkre is).
- ▶ A XIX. század elejétől némi bővülés
  - ▶ elsődlegesen az egyenletek megoldhatóságával kapcsolatos vizsgálatokban
  - ▶ e terminológiát használták a permutációkkal (helyettesítések) való számolásokra, majd a tetszőleges szimbólumokkal való számolásokra is.

## Az algebra tárgya 2.

- ▶ Az egyenletek megoldhatóságának vizsgálatában fontos szerepet játszottak bizonyos véges számhalmazok permutációi és e permutációk kompozíciói (egymás után való elvégzésük). Elsősorban Galois és Cayley (a XIX. század első harmada) érdeme, hogy észrevették: a permutációk kompozíciója egy (asszociatív) szorzás műveletnek is tekinthető. E fölismerés vezetett el a (permutáció)csoportok fölfedezéséhez.
- ▶ Az előbbi fölismerés nemcsak az algebra tárgykörének bővülését jelentette, hanem ismeretelméleti, tudományelméleti jelentőséggel is bírt. Nevezetesen megdőlt az az évezredek nézete, hogy a matematika kizárólag mennyiségi (számokkal kifejezhető) kérdésekkel foglalkozik. A permutációcsoport (akkor még nem nevezték így) volt az első olyan objektum a matematikában, amely nemcsak mennyiségi jellemzőkkel bírt, hanem bizonyos értelemben **minőségivel** is, hiszen egy halmazt, egy összességet — adott tulajdonságokkal rendelkező — művelettel együtt vizsgált.

## Az algebra tárgya 3.

- ▶ Ezzel kezdetét vette az algebra egy „új korszaka”, amelyben a korábbi — immáron klasszikus — problémák mellett ún. „algebrai struktúrákat” is vizsgáltak. Rövidesen ez lett a fő irány.
- ▶ Kezdetben csoportokat és testeket vizsgáltak, majd a számfogalom precizizálásakor bevezették a (test fölötti) algebra fogalmát is. A struktúrákkal foglalkozó algebrai fejezetet egyre inkább **modern algebrának** nevezték, megkülönböztetésül a korábbi **klasszikus algebrától**.
- ▶ A XIX. század utolsó negyedétől kezdve egyre több absztrakt struktúrát vizsgáltak: a csoportok, testek és algebrák után bevezették a test általánosításaként a gyűrű fogalmát, amelynek rögtön számelméleti alkalmazásai lehetőségeire nyílt lehetőség (ideálok a Fermat sejtéssel kapcsolatos vizsgálatokban), majd a XX. század elején megjelentek a hálók és a Boole-algebrák, majd a 30-as évek elején a csoport fogalmának általánosításaként a félcsoportok.

## Az absztrakt algebra 1.

- ▶ Az eddig említett „klasszikus algebrai struktúrák” elméletét együttesen kezdték **absztrakt algebrának** is nevezni. E témából az első monográfia az 1930-as években jelent meg, B. L. van der Waerden *Moderne Algebra* c. három kötetes műve.
- ▶ Ugyanezen időben egyre nyilvánvalóbbá vált, hogy az egyes absztrakt algebrai struktúrák (csoportok, gyűrűk, stb.) elméletében számos igen hasonló tartalmú tétel érvényes. Ez fölvetette azt, hogy meg lehetne alkotni egy „egységes struktúraelméletet”.
- ▶ Az egységes (általános) elmélet kialakításának első lépése G. Birkhoff 1936-ban publikált dolgozata volt, innen számíthatjuk az **általános algebra** megjelenését (kezdetben univerzális algebraként említették, és ez a terminológia a mai napig is használatos).

## A kurzuson érintett kérdések.

### Klasszikus algebra 1.

- ▶ A másodfokú egyenletekre vezető problémák és azok megoldása Hammurapi korában (az Óbabiloni Birodalom korában). Algoritmus a (pozitív racionális) számok négyzetgyök kiszámítására.
- ▶ Lineáris egyenletrendszerekre vezető problémák és azok megoldási eljárásai az ókori Kínában.
- ▶ Középkori iszlám matematikusok néhány jellegzetes eredménye az egyenletek elméletében (pl. al-Khwarizmi, Abu Kamil, Omar Khayyam).
- ▶ A reneszánsz Itália algebrája (a pisai Leonardotól Cardanoig és Bombelliig: a firenzei Benedek mester, A. Mazzighni, a pisai Dardi mester).
- ▶ Ami végül elvezetett Galois eredményéhez (Waringtól Abel- és Gaussig).

## A kurzuson érintett kérdések.

### Klasszikus algebra 2.

Galois eredményei: mikor létezik „gyökképlet”, mely egyenletek gyökei kaphatók meg az együtthatókból.

### Absztrakt algebra 1.

- ▶ A permutációcsoportokkal kapcsolatos első eredmények a XIX században.
- ▶ Az egyik első nem kommutatív struktúra: Hamilton kvaterniói.
- ▶ A csoport absztrakt fogalmának megjelenése.
- ▶ Az első struktúrátételek (pl. a véges Abel-csoportok alaptétele).
- ▶ További ”klasszikus” absztrakt algebrai struktúrák: gyűrűk, hálók.

## A kurzuson érintett kérdések.

### Absztrakt algebra 2.

- ▶ Az univerzális (általános) algebra megjelenése. A legfontosabb konstrukciók, G. Birkhoff első idevonatkozó eredményei 1936-ból (varietások, szubdirekt fölbonthatás).
- ▶ Az algebra és a logika kapcsolata (megőrzési tételek, Malcev-típusú jellemzések).

## A föltételezett előismeretek.

1. Klasszikus algebra:
  - ▶ polinom,
  - ▶ egyenlet, egyenletrendszer,
  - ▶ permutáció,
  - ▶ művelet.
2. Lineáris algebra:
  - ▶ mátrix.
3. Absztrakt algebra:
  - ▶ csoport, gyűrű, test;
  - ▶ testbővítés.