

A sztochasztika alapjai

MBNXK262

5. előadás: Nevezetes diszkrét eloszlások, Folytonos véletlen változók

Kevei Péter

2025/26 tavasz

Ismétlés: véletlen változó, eloszlásfüggvény

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező

$\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ függvény *véletlen változó*

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \mathbf{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\}), \quad x \in \mathbb{R}$$

Ismétlés: véletlen változó, eloszlásfüggvény

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező

$\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ függvény *véletlen változó*

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \mathbf{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\}), \quad x \in \mathbb{R}$$

ξ *diszkrét*, ha lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots$,

$p_i = \mathbf{P}(\xi = x_i) > 0$ a változó eloszlása.

Ismétlés: véletlen változó, eloszlásfüggvény

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező

$\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ függvény *véletlen változó*

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \mathbf{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\}), \quad x \in \mathbb{R}$$

ξ *diszkrét*, ha lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots$,

$p_i = \mathbf{P}(\xi = x_i) > 0$ a változó eloszlása.

várható értéke $\mathbf{E}(\xi) = \sum_i x_i \mathbf{P}(\xi = x_i)$,

szórása $\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}(\xi))^2]} = \sqrt{\mathbf{E}(\xi^2) - (\mathbf{E}(\xi))^2}$.

Geometriai eloszlás

Dobókockával dobunk az első hatosig. ξ a szükséges dobások száma.

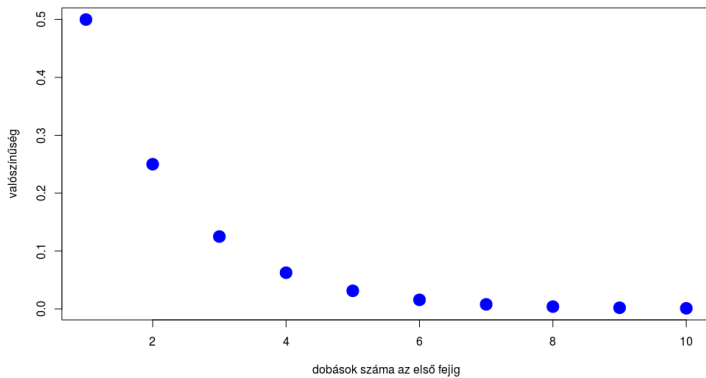
Geometriai eloszlás

Dobókockával dobunk az első hatosig. ξ a szükséges dobások száma.

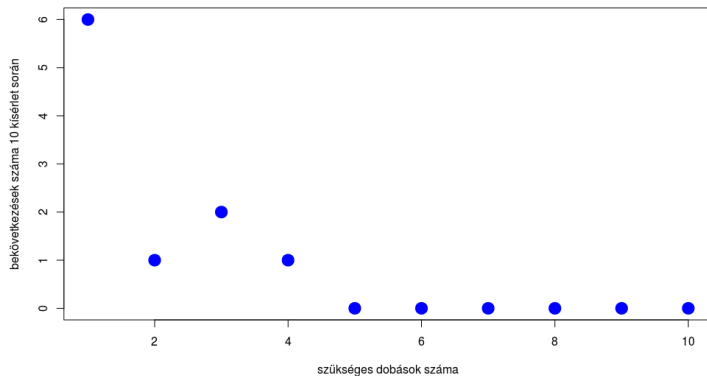
Az ξ véletlen változó p paraméterű geometriai eloszlású, $\xi \sim \text{Geo}(p)$, ha a lehetséges értékek $1, 2, \dots$ és

$$\mathbf{P}(\xi = k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Geometriai eloszlás(1/2)



Szimuláció: Geometriai eloszlás($1/2$), $N = 10$



Tipikus példa: addig ismételünk egy kísérletet, amíg a vizsgált A esemény be nem következik.

Diszkrét örökifjú eloszlás, hiszen ha $k, \ell \in \mathbb{N}$, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\xi > k + \ell | \xi > k) &= \frac{\mathbf{P}(\xi > k + \ell)}{\mathbf{P}(\xi > k)} \\ &= \frac{q^{k+\ell}}{q^k} = q^\ell = \mathbf{P}(\xi > \ell).\end{aligned}$$

Kupongyűjtő probléma

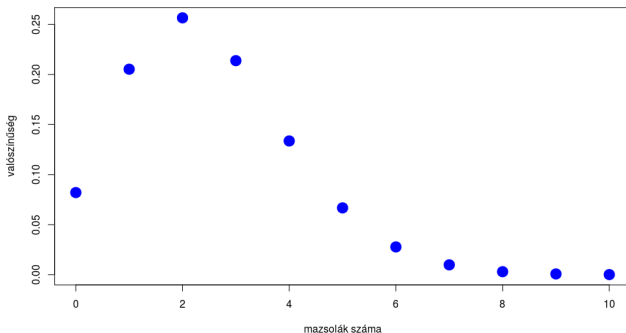
Egy N különböző elemből álló sokaságból visszatevésees mintát veszünk. S_r ennyi elemet kellett húznunk, hogy kapjunk r különbözőt.

Határozzuk meg $\mathbf{E}(S_r)$ várható értékét, majd adjunk $\mathbf{E}(S_N)$ -re kezelhető aszimptotikus egyenlőséget!

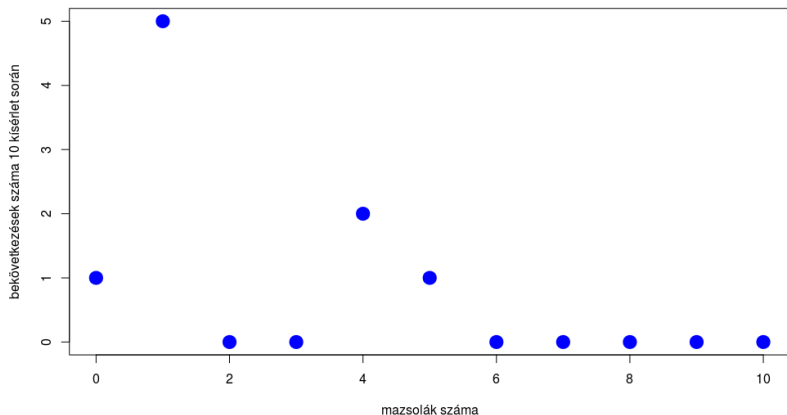
Nevezetes eloszlások: Poisson-eloszlás

ξ λ paraméterű Poisson-eloszlású, $\xi \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, ha ξ lehetséges értékei $0, 1, 2, \dots$, és

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



Poisson-eloszlás szimuláció



A $\lambda = 2.5$ paraméterű Poisson-eloszlású véletlen változó
szimulációja $N = 10$ -szer

Poisson és binomiális

Legyen $p = p_n = \lambda/n$, $\lambda > 0$, és $\xi_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$.
 k fix, $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\xi_n = k)$$

Poisson és binomiális

Legyen $p = p_n = \lambda/n$, $\lambda > 0$, és $\xi_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$.
 k fix, $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\xi_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$$

Poisson és binomiális

Legyen $p = p_n = \lambda/n$, $\lambda > 0$, és $\xi_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$.
 k fix, $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\xi_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

Poisson és binomiális

Legyen $p = p_n = \lambda/n$, $\lambda > 0$, és $\xi_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$.

k fix, $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\xi_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\&= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\end{aligned}$$

Poisson és binomiális

Legyen $p = p_n = \lambda/n$, $\lambda > 0$, és $\xi_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$.

k fix, $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\xi_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\&= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\&\rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} \cdot 1 \cdot e^{-\lambda} \cdot 1 = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.\end{aligned}$$

Ezek alapján azt látjuk, hogy akkor lép fel Poisson-eloszlás, ha egy kis valószínűségű eseményt sokszor „ismételünk”:

- ▶ téves telefonhívások száma;
- ▶ autóbalesetek száma;
- ▶ nyomdahunyak száma egy oldalon;
- ▶ földrengések száma;
- ▶ csillagok száma egy adott térrészben;
- ▶ mazsolák száma a pudingban;
- ▶ programhibák száma egy kódban;
- ▶ halálos lórúgások száma egy év alatt a porosz hadseregben (Bortkiewicz)

Folytonos véletlen változók

Definíció

Egy ξ véletlen változó *folytonos eloszlású*, ha létezik egy nemnegatív f függvény, melyre

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Az $f(x)$ függvény a ξ véletlen változó sűrűségfüggvénye.

Folytonos véletlen változók

Definíció

Egy ξ véletlen változó *folytonos eloszlású*, ha létezik egy nemnegatív f függvény, melyre

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Az $f(x)$ függvény a ξ véletlen változó sűrűségfüggvénye.

A definícióból világos, hogy

$$\mathbf{P}(\xi \in (a, b)) = \mathbf{P}(\xi \in (a, b]) = \int_a^b f(y)dy.$$

Speciálisan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \mathbf{P}(\xi \in \mathbb{R}) = 1, \text{ és } \mathbf{P}(\xi = x) = \int_x^x f(y)dy = 0.$$

Folytonos véletlen változó várható értéke

Definíció

Legyen ξ folytonos véletlen változó, f sűrűségfüggvénnyel.
Várható értéke

$$\mathbf{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Szórása

$$\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}(\xi))^2]} = \sqrt{\mathbf{E}(\xi^2) - (\mathbf{E}(\xi))^2}.$$

Folytonos véletlen változó várható értéke

Definíció

Legyen ξ folytonos véletlen változó, f sűrűségfüggvénnyel.
Várható értéke

$$\mathbf{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

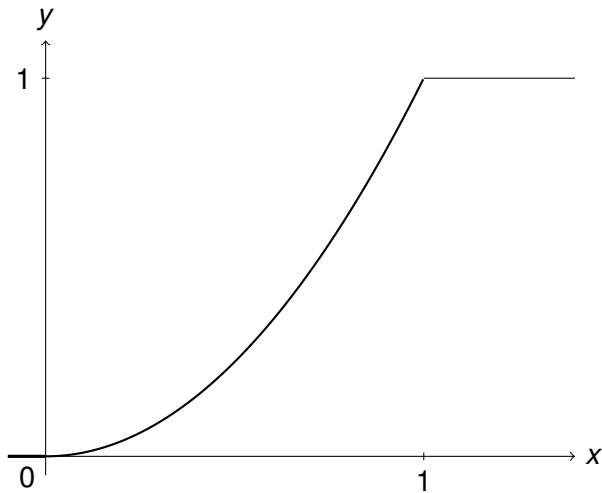
Szórása

$$\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}(\xi))^2]} = \sqrt{\mathbf{E}(\xi^2) - (\mathbf{E}(\xi))^2}.$$

$$\mathbf{E}(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx.$$

A $(0, 1)$ intervallumon egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint választunk két pontot. Adjuk meg a nagyobbik eloszlását, várható értékét!

Eloszlásfüggvény



Példa

A $(0, 1)$ intervallumon egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint választunk két pontot. Adjuk meg a nagyobbik eloszlását, várható értékét! Legyen ξ_1, ξ_2 a két pont, $\eta = \max\{\xi_1, \xi_2\}$.

Példa

A $(0, 1)$ intervallumon egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint választunk két pontot. Adjuk meg a nagyobbik eloszlását, várható értékét! Legyen ξ_1, ξ_2 a két pont, $\eta = \max\{\xi_1, \xi_2\}$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbf{P}(\eta < x) = \mathbf{P}(\xi_1 < x, \xi_2 < x) = \mathbf{P}(\xi_1 < x)\mathbf{P}(\xi_2 < x) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ x^2, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{ha } x \geq 1, \end{cases} \\ &= \int_{-\infty}^x f(y)dy, \end{aligned}$$

ahol

$$f(y) = \begin{cases} 2y, & \text{ha } y \in [0, 1], \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

$$f(y) = \begin{cases} 2y, & \text{ha } y \in [0, 1], \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

$$\mathbf{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 2x^2dx = \frac{2}{3}.$$

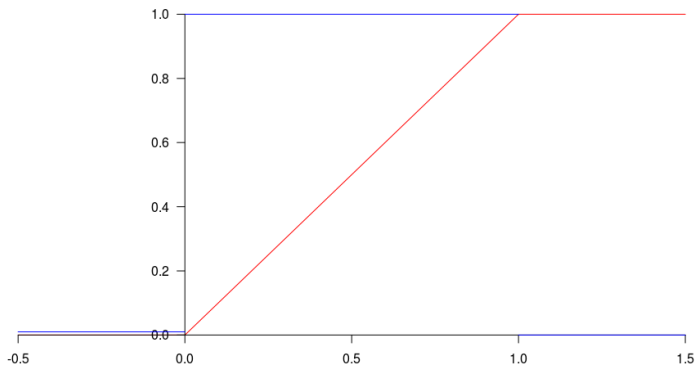
$$\mathbf{E}(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx = \int_0^1 2x^3dx = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Tehát } \mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{4}{9}} = \frac{1}{\sqrt{18}}.$$

Egyenletes eloszlás

ξ egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumon, $\xi \sim \text{Egy}(a, b)$,
 $-\infty < a < b < \infty$, ha sűrűségfüggvénye

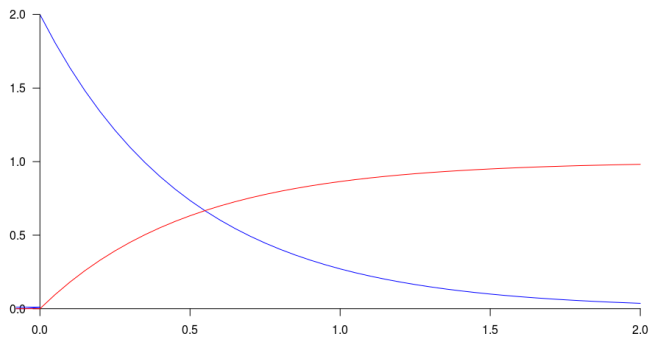
$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } y \in (a, b), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$



Exponenciális eloszlás

ξ λ -paraméterű exponenciális eloszlású, $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, ha sűrűségfüggvénye

$$f(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

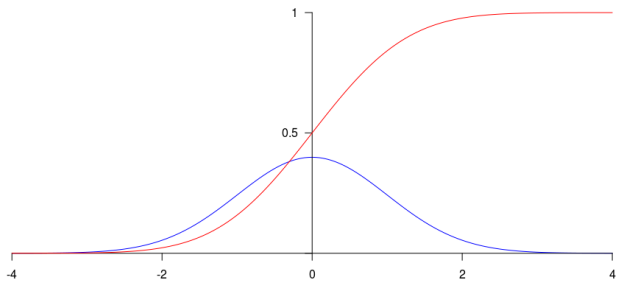


Momentumok

Normális eloszlás

ξ normális eloszlású μ és σ^2 paraméterekkel, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,
 $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$, ha sűrűségfüggvénye

$$f_{\mu, \sigma}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$



Standardizálás

Állítás

Ha $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, akkor $(\xi - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$.

$\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ és $Z \sim N(0, 1)$, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|\xi - \mu| \leq \lambda\sigma) &= \mathbf{P}(|Z| \leq \lambda) \\ &= \Phi(\lambda) - \Phi(-\lambda) \\ &= 2\Phi(\lambda) - 1 \\ &= \begin{cases} 0,6827, & \lambda = 1, \\ 0,9545, & \lambda = 2, \\ 0,9973, & \lambda = 3, \\ 0,9999, & \lambda = 4. \end{cases}\end{aligned}$$