

A sztochasztika alapjai

MBNXK262

4. előadás: Függetlenség; Diszkrét véletlen változók

Kevei Péter

2025/26 tavasz

Emlékeztető

Definíció

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ egy valószínűségi mező, A, B események, és $\mathbf{P}(B) > 0$. Ekkor az A esemény B eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Véletlenített válaszadás

- ▶ Kérdőívet készítünk, melyen kínos kérdések is vannak.
- ▶ A kínos kérdésnél a kitöltő feldob egy (szabályos) pénzérmét. Ha fejet kap, akkor válaszoljon igennel, ha írást, akkor válaszoljon arra a kérdésre, hogy énekel-e a zuhany alatt.

Véletlenített válaszadás

- ▶ Kérdőívet készítünk, melyen kínos kérdések is vannak.
- ▶ A kínos kérdésnél a kitöltő feldob egy (szabályos) pénzérmét. Ha fejet kap, akkor válaszoljon igennel, ha írást, akkor válaszoljon arra a kérdésre, hogy énekel-e a zuhany alatt.

Az emberek (ismeretlen!) p hányada énekel a zuhany alatt.

- ▶ Mennyi a valószínűsége, hogy a teszt kitöltése során valaki igennel válaszol?
- ▶ Az igen válaszok arányából hogy következtethetünk a valódi p arányra?

Függetlenség

A B esemény bekövetkezése nem befolyásolja az A bekövetkezését, ha

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A),$$

ahonnan $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

Definíció

Az A és B események függetlenek, ha $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

Definíció

Az A és B események függetlenek, ha $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

- ▶ a függetlenség szimmetrikus
- ▶ a biztos és a lehetetlen eseménytől minden esemény független

Példa

Francia kártyapakliból húzunk egy lapot. D : dámát húzunk, K kőrt húzunk.

Francia kártya: 52 lapos, 4 szín (kőr, káró, pikk, treff), 13 figura (Á, 2–10, J, D, K)

Három esemény függetlensége

Definíció

Az A, B, C események **függetlenek**, ha

- ▶ $\mathbf{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$,
- ▶ $\mathbf{P(A \cap C) = P(A)P(C)}$,
- ▶ $\mathbf{P(B \cap C) = P(B)P(C)}$,
- ▶ és $\mathbf{P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)}$.

Továbbá, az A, B, C események **páronként függetlenek**, ha bármely kettő független.

Több esemény függetlensége

Definíció

Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események **függetlenek**, ha bármely $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ és $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ esetén

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \dots \mathbf{P}(A_{i_k}).$$

Végtelen sok esemény akkor független, ha közülük bármely véges sok független.

Bináris szimmetrikus csatorna

- ▶ 0 – 1 sorozatot akarunk küldeni zajos csatornán
- ▶ a csatorna minden bitet egymástól függetlenül p valószínűséggel elront

Mennyi a valószínűsége, hogy 5 bit hiba nélkül átmegy?

Bináris szimmetrikus csatorna

- ▶ 0 – 1 sorozatot akarunk küldeni zajos csatornán
- ▶ a csatorna minden bitet egymástól függetlenül p valószínűséggel elront

Mennyi a valószínűsége, hogy 5 bit hiba nélkül átmegy?

$$\mathbf{P(5 \text{ bit hiba nélkül átmegy }) = (1 - p)^5.}$$

Ha $p = 0,1$, akkor ez 0,59, míg $p = 0,2$ esetén csak 0,33.

Bináris szimmetrikus csatorna

Minden bitet háromszor küldünk el, tehát a 0 helyett 000, az 1 helyett 111.

$$\begin{aligned} p' &= \mathbf{P}(\text{hibásan dekódol}) \\ &= \mathbf{P}(\text{pontosan 2 bit fordul át}) + \mathbf{P}(\text{mindhárom átfordul}) \\ &= 3p^2(1 - p) + p^3 = 3p^2 - 2p^3. \end{aligned}$$

Ha $p = 0,1$, akkor $p' = 0,028$.

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\text{5 bitnyi üzenet háromszorozva hiba nélkül átmegy}) \\ &= (1 - p')^5 = (1 - 3p^2 + 2p^3)^5. \end{aligned}$$

0,86, ha $p = 0,1$.

Véletlen változó

Definíció

Tekintsünk egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőt. Az

$$\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$$

függvényt *véletlen változónak* nevezzük, ha a $\{\omega : \xi(\omega) < a\} \in \mathcal{A}$ tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén.

- ▶ dobókockával dobott szám értéke;
- ▶ három kockával dobunk, akkor a legkisebb dobott szám;
- ▶ az ötöslottón kihúzott legnagyobb szám;
- ▶ egy szelvényen elért találatok száma;
- ▶ hibás bitek száma
- ▶ egységnégyzetben egyenletesen választott pont milyen távol van a négyzet határától

Eloszlásfüggvény

Definíció

A ξ véletlen változó *eloszlásfüggvénye* az

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \mathbf{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\}), \quad x \in \mathbb{R},$$

függvény.

Eloszlásfüggvény tulajdonságai

Tétel (Eloszlásfüggvény tulajdonságai)

Legyen $F(x)$ egy ξ véletlen változó eloszlásfüggvénye. Ekkor

- (i) F monoton nemcsökkenő;*
- (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$;*
- (iii) F balról folytonos.*

Diszkrét véletlen változók

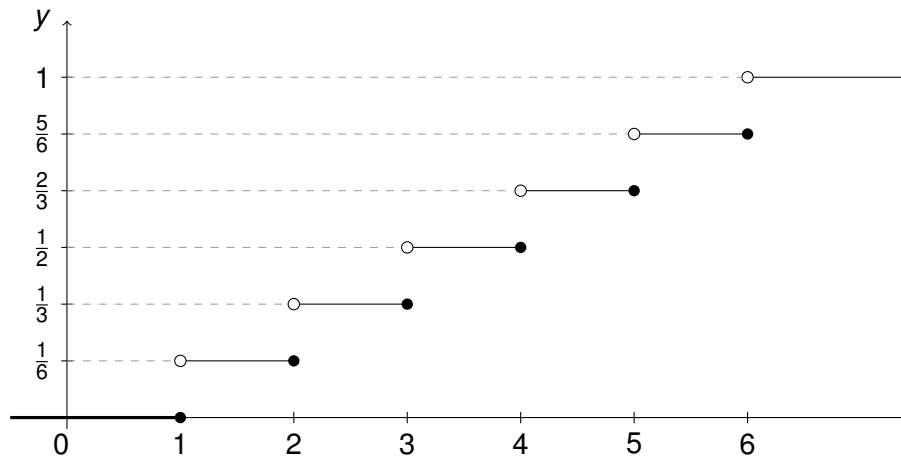
ξ *diszkrét*, ha értékkészlete megszámlálható (véges vagy megszámlálhatóan végtelen). Lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots$, $p_i = \mathbf{P}(\xi = x_i) > 0$ a változó eloszlása.

Diszkrét véletlen változók

ξ *diszkrét*, ha értékkészlete megszámlálható (véges vagy megszámlálhatóan végtelen). Lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots$, $p_i = \mathbf{P}(\xi = x_i) > 0$ a változó eloszlása.

Példa: dobókocka

Dobókockával dobott szám



A ξ diszkrét véletlen változó várható értéke

$$\mathbf{E}(\xi) = \sum_i x_i \mathbf{P}(\xi = x_i),$$

ha $\sum_i |x_i| \mathbf{P}(\xi = x_i) < \infty$. A ξ szórása ($\mathbf{D}^2(\xi) = \text{Var}(\xi)$, variancia)

$$\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}(\xi))^2]} = \sqrt{\mathbf{E}(\xi^2) - (\mathbf{E}(\xi))^2}.$$

A ξ diszkrét véletlen változó várható értéke

$$\mathbf{E}(\xi) = \sum_i x_i \mathbf{P}(\xi = x_i),$$

ha $\sum_i |x_i| \mathbf{P}(\xi = x_i) < \infty$. A ξ szórása ($\mathbf{D}^2(\xi) = \text{Var}(\xi)$, variancia)

$$\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}(\xi))^2]} = \sqrt{\mathbf{E}(\xi^2) - (\mathbf{E}(\xi))^2}.$$

$$\mathbf{E}(\xi^2) = \sum_i x_i^2 \mathbf{P}(\xi = x_i)$$

Nevezetes eloszlások: Bernoulli-eloszlás

ξ véletlen változó p paraméterű Bernoulli-eloszlású,
 $\xi \sim \text{Bernoulli}(p)$, $p \in [0, 1]$, ha lehetséges értékei 0, 1, és
 $\mathbf{P}(\xi = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(\xi = 0)$.

Nevezetes eloszlások: Binomiális eloszlás

Az ξ véletlen változó (n, p) paraméterű binomiális eloszlású, $\xi \sim \text{Bin}(n, p)$, $n \in \{1, 2, \dots\}$, $p \in [0, 1]$, ha lehetséges értékei $0, 1, \dots, n$, és $\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$.

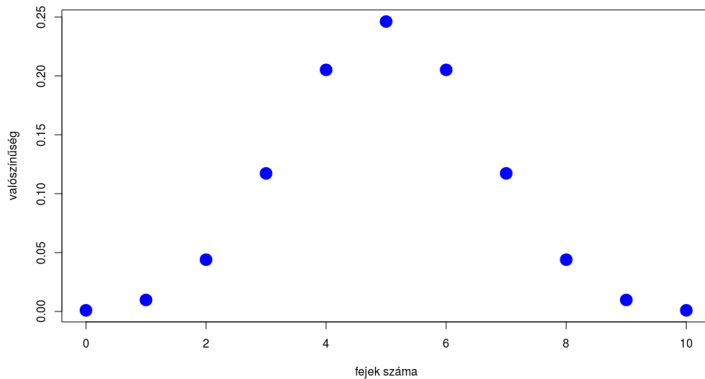
Nevezetes eloszlások: Binomiális eloszlás

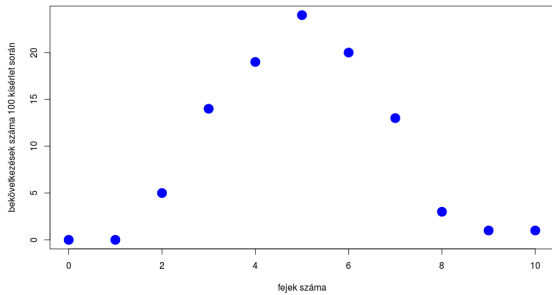
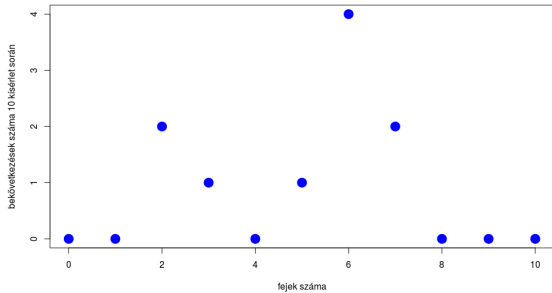
Az ξ véletlen változó (n, p) paraméterű binomiális eloszlású, $\xi \sim \text{Bin}(n, p)$, $n \in \{1, 2, \dots\}$, $p \in [0, 1]$, ha lehetséges értékei $0, 1, \dots, n$, és $\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$.

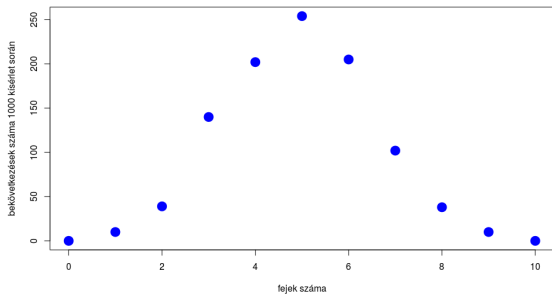
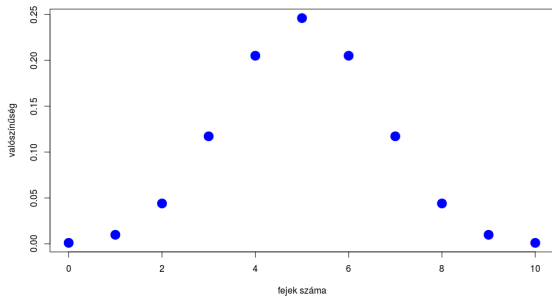
Állítás

Legyenek $I_1, \dots, I_n$ független, Bernoulli(p) eloszlású véletlen változók. Ekkor $\sum_{i=1}^n I_i$ binomiális eloszlású (n, p) paraméterekkel.

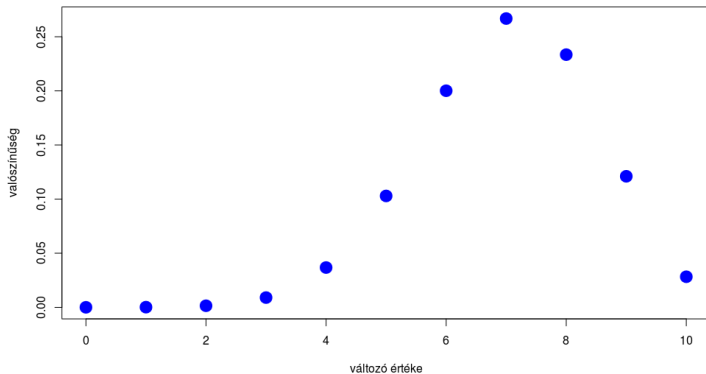
Binomiális eloszlás($10, 1/2$)







Binomiális eloszlás(10, 0.7) (nem szimmetrikus)



Geometriai eloszlás

Az ξ véletlen változó p paraméterű geometriai eloszlású,
 $\xi \sim \text{Geo}(p)$, ha a lehetséges értékek $1, 2, \dots$ és

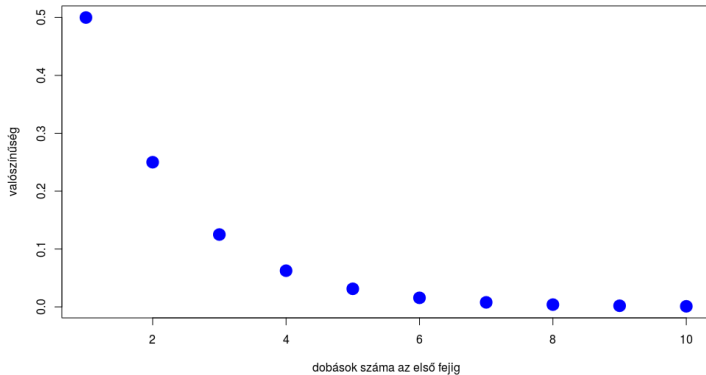
$$\mathbf{P}(\xi = k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Tipikus példa: addig ismételünk egy kísérletet, amíg a vizsgált A esemény be nem következik.

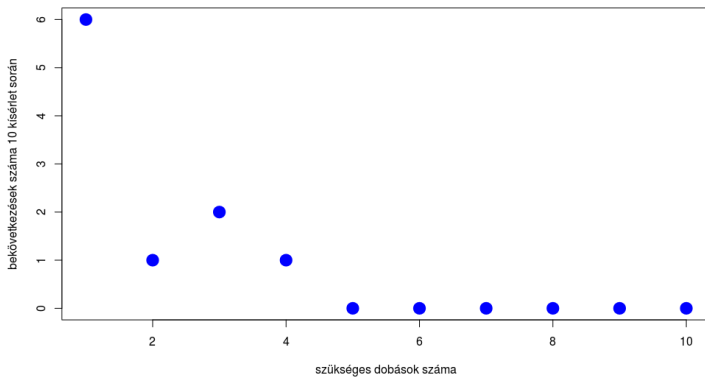
Diszkrét örökifjú eloszlás, hiszen ha $k, \ell \in \mathbb{N}$, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\xi > k + \ell | \xi > k) &= \frac{\mathbf{P}(\xi > k + \ell)}{\mathbf{P}(\xi > k)} \\ &= \frac{q^{k+\ell}}{q^k} = q^\ell = \mathbf{P}(\xi > \ell).\end{aligned}$$

Geometriai eloszlás(1/2)



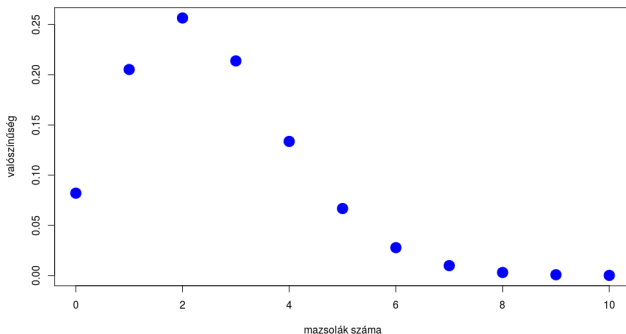
Szimuláció: Geometriai eloszlás($1/2$), $N = 10$



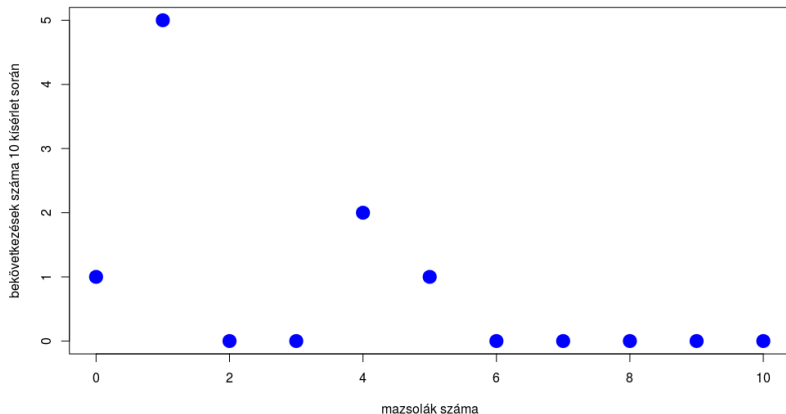
Nevezetes eloszlások: Poisson-eloszlás

ξ λ paraméterű Poisson-eloszlású, $\xi \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, ha ξ lehetséges értékei $0, 1, 2, \dots$, és

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



Poisson-eloszlás szimuláció



A $\lambda = 2.5$ paraméterű Poisson-eloszlású véletlen változó szimulációja $N = 10$ -szer

Poisson és binomiális

Legyen $p = p_n = \lambda/n$, $\lambda > 0$, és $\xi_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\xi_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Ezek alapján azt látjuk, hogy akkor lép fel Poisson-eloszlás, ha egy kis valószínűségű eseményt sokszor „ismételünk”:

- ▶ téves telefonhívások száma;
- ▶ autóbalesetek száma;
- ▶ nyomdahubák száma egy oldalon;
- ▶ földrengések száma;
- ▶ csillagok száma egy adott térrészben;
- ▶ mazsolák száma a pudingban.
- ▶ halálos lórúgások száma egy év alatt a porosz hadseregben (Bortkiewicz)