

A sztochasztika alapjai

MBNXK262

3. előadás: Feltételes valószínűség, függetlenség

Kevei Péter

2025/26 tavasz

Feltételes valószínűség

Definíció

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ egy valószínűségi mező, A, B események, és $\mathbf{P}(B) > 0$. Ekkor az A esemény B eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Teljes eseményrendszer

Definíció

A $B_1, B_2, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha

- ▶ minden $i \neq j$ párra $B_i \cap B_j = \emptyset$;
- ▶ $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$.

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer, melyre $\mathbf{P}(B_n) > 0$ minden n -re. Ekkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A|B_n)\mathbf{P}(B_n).$$

Monty Hall probléma

- ▶ játékos: 3 csukott ajtó közül 1-et választ
- ▶ 2 mögött kecske, 1 mögött autó
- ▶ Miután választ, a játékvezető kinyitja egy ajtót, amit nem választott a játékos, és ami mögött kecske van.
- ▶ Ezután felajánlja a játékosnak, hogy cserélhet ajtót.
- ▶ Megéri-e váltani?

<https://montyhall.io/>

Monty Hall probléma

- ▶ játékos: 3 csukott ajtó közül 1-et választ
- ▶ 2 mögött kecske, 1 mögött autó
- ▶ Miután választ, a játékvezető kinyitja egy ajtót, amit nem választott a játékos, és ami mögött kecske van.
- ▶ Ezután felajánlja a játékosnak, hogy cserélhet ajtót.
- ▶ Megéri-e váltani?

<https://montyhall.io/>

Tfh a játékos az 1-est választotta, a játékvezető a 2-est nyitatta ki. A_i : az autó az i -edik ajtó mögött van, B : játékvezető a 2-es ajtót nyitatta ki.

Szindbád

Szindbádnak jogában áll N háremhölgy közül egyet kiválasztania oly módon, hogy az előtte egyenként elvonuló hölgyek valamelyikére rámutat.

- ▶ mindig csak az éppen akkor elvonuló lányt választhatja
- ▶ egyértelmű szépségi sorrendje van
- ▶ bármely elvonulási sorrend egyformán valószínű

Szindbád

Szindbádnak jogában áll N háremhölgy közül egyet kiválasztania oly módon, hogy az előtte egyenként elvonuló hölgyek valamelyikére rámutat.

- ▶ mindig csak az éppen akkor elvonuló lányt választhatja
- ▶ egyértelmű szépségi sorrendje van
- ▶ bármely elvonulási sorrend egyformán valószínű

Stratégia: Szindbád k lányt elenged, majd kiválasztja az elsőt, aki szebb az összes előtte elvonultnál.

Szindbád

Szindbádnak jogában áll N háremhölgy közül egyet kiválasztania oly módon, hogy az előtte egyenként elvonuló hölgyek valamelyikére rámutat.

- ▶ mindig csak az éppen akkor elvonuló lányt választhatja
- ▶ egyértelmű szépségi sorrendje van
- ▶ bármely elvonulási sorrend egyformán valószínű

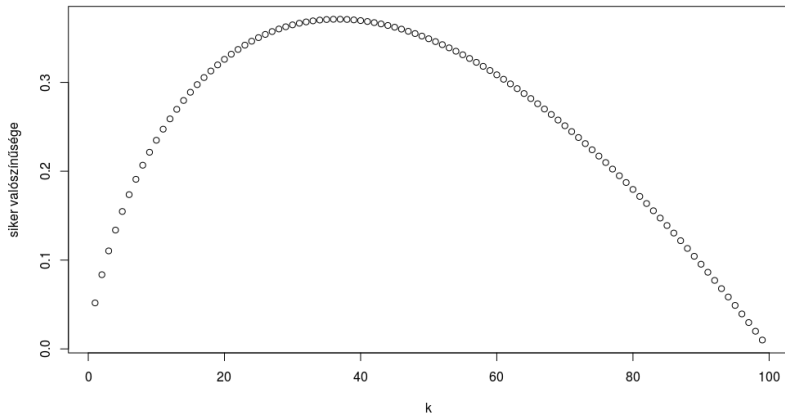
Stratégia: Szindbád k lányt elenged, majd kiválasztja az elsőt, aki szebb az összes előtte elvonultnál.

Mennyi a valószínűsége, hogy a legszebb hölgyet választja ki? Milyen k esetén lesz ez a valószínűség a legnagyobb, ha N elég nagy?

Szindbád

Jelölje A_i azt az eseményt, hogy a i -edik lány a legszebb, $i = 1, 2, \dots, N$, és B azt, hogy Szindbád a legszebb lányt választja.

Szindbád



A siker valószínűsége k függvényében, $N = 100$.

$$P(B) = \sum_{i=k+1}^N \frac{1}{N} \frac{k}{i-1}$$

Szindbád

És ez mennyi?

$$\mathbf{P}(B) = \frac{k}{N} \sum_{i=k}^{N-1} \frac{1}{i}.$$

Integrálközelítő összeg becslése integrállal:

$$\log \frac{N}{k} = \int_k^N \frac{1}{x} dx \leq \sum_{i=k}^{N-1} \frac{1}{i} \leq \int_{k-1}^{N-1} \frac{1}{x} dx = \log \frac{N-1}{k-1}.$$

Tehát

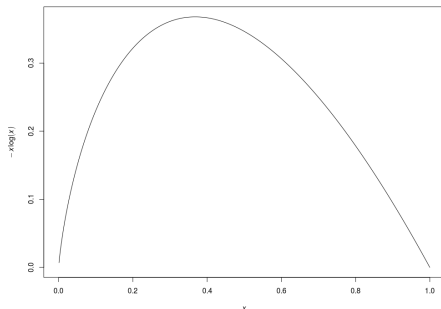
$$\mathbf{P}(B) \sim \frac{k}{N} \log \frac{N}{k}.$$

Szindbád

Hogy válassza Szindbád k -t?

$$\mathbf{P}(B) \sim \frac{k}{N} \log \frac{N}{k}.$$

Az $f(x) = x \log \frac{1}{x}$ függvény maximuma kell $[0, 1]$ -en. HF
Maximumhely $x = 1/e$,
maximum értéke: $1/e$,
tehát $k = \lceil N/e \rceil$.



Szindbád

- ▶ Szindbád megtudja N -et.
- ▶ Elenged $k = \lfloor N/e \rfloor$ lányt.
- ▶ Majd kiválasztja az elsőt, aki szebb az összes eddiginél.
- ▶ Ekkor nagyjából $1/e \approx 0,368$ valószínűséggel a legszebbet választja.

Bayes-formula

Tétel

*Legyenek A és B olyan események, hogy $\mathbf{P}(A) > 0$, $\mathbf{P}(B) > 0$.
Ekkor*

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Bayes-tétel

Tétel

Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer, melyre $\mathbf{P}(B_n) > 0$ minden n -re. Ekkor tetszőleges pozitív valószínűségű $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén, tetszőleges k -ra

$$\mathbf{P}(B_k|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k)}{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A|B_n)\mathbf{P}(B_n)}.$$

Doppingteszt

- ▶ doppingolók 99%-ánál pozitív
- ▶ nem doppingoló 1%-nál tévesen pozitív

Tfh a sportolók 1%-a doppingol. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott sportoló

(a) doppingtesztje pozitív?

(b) doppingolt, ha tudjuk, hogy a doppingtesztje pozitív?

T : a teszt eredménye pozitív; D : a sportoló doppingolt

Véletlenített válaszadás

- ▶ Kérdőívet készítünk, melyen kínos kérdések is vannak.
- ▶ A kínos kérdésnél a kitöltő feldob egy (szabályos) pénzérmét. Ha fejet kap, akkor válaszoljon igennel, ha írást, akkor válaszoljon arra a kérdésre, hogy énekel-e a zuhany alatt.

Véletlenített válaszadás

- ▶ Kérdőívet készítünk, melyen kínos kérdések is vannak.
- ▶ A kínos kérdésnél a kitöltő feldob egy (szabályos) pénzérmét. Ha fejet kap, akkor válaszoljon igennel, ha írást, akkor válaszoljon arra a kérdésre, hogy énekel-e a zuhany alatt.

Az emberek (ismeretlen!) p hányada énekel a zuhany alatt.

- ▶ Mennyi a valószínűsége, hogy a teszt kitöltése során valaki igennel válaszol?
- ▶ Az igen válaszok arányából hogy következtethetünk a valódi p arányra?

Függetlenség

A B esemény bekövetkezése nem befolyásolja az A bekövetkezését, ha

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A),$$

ahonnan $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

Definíció

Az A és B események függetlenek, ha $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

Definíció

Az A és B események függetlenek, ha $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

- ▶ a függetlenség szimmetrikus
- ▶ a biztos és a lehetetlen eseménytől minden esemény független

Példa

Francia kártyapakliból húzunk egy lapot. D : dámát húzunk, K kőrt húzunk.

Francia kártya: 52 lapos, 4 szín (kőr, káró, pikk, treff), 13 figura (Á, 2–10, J, D, K)

Három esemény függetlensége

Definíció

Az A, B, C események **függetlenek**, ha

- ▶ $\mathbf{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$,
- ▶ $\mathbf{P(A \cap C) = P(A)P(C)}$,
- ▶ $\mathbf{P(B \cap C) = P(B)P(C)}$,
- ▶ és $\mathbf{P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)}$.

Továbbá, az A, B, C események **páronként függetlenek**, ha bármely kettő független.

Több esemény függetlensége

Definíció

Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események **függetlenek**, ha bármely $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ és $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ esetén

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \dots \mathbf{P}(A_{i_k}).$$

Végtelen sok esemény akkor független, ha közülük bármely véges sok független.

Állítás

Ha az $A_1, \dots, A_n$ események függetlenek, akkor tetszőleges $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén az $\{A_1, \dots, A_k\}$ eseményekből ill. az $\{A_{k+1}, \dots, A_n\}$ eseményekből alkotott események függetlenek.

Pl. ha A, B, C, D független események, akkor $A \cup B$ és $C \cap D$ is függetlenek. HF

Bináris szimmetrikus csatorna

- ▶ 0 – 1 sorozatot akarunk küldeni zajos csatornán
- ▶ a csatorna minden bitet egymástól függetlenül p valószínűséggel elront

Mennyi a valószínűsége, hogy 5 bit hiba nélkül átmegy?

Bináris szimmetrikus csatorna

- ▶ 0 – 1 sorozatot akarunk küldeni zajos csatornán
- ▶ a csatorna minden bitet egymástól függetlenül p valószínűséggel elront

Mennyi a valószínűsége, hogy 5 bit hiba nélkül átmegy?

$$\mathbf{P}(\text{5 bit hiba nélkül átmegy}) = (1 - p)^5.$$

Ha $p = 0,1$, akkor ez 0,59, míg $p = 0,2$ esetén csak 0,33.

Bináris szimmetrikus csatorna

Minden bitet háromszor küldünk el, tehát a 0 helyett 000, az 1 helyett 111.

$$\begin{aligned} p' &= \mathbf{P}(\text{hibásan dekódol}) \\ &= \mathbf{P}(\text{pontosan 2 bit fordul át}) + \mathbf{P}(\text{mindhárom átfordul}) \\ &= 3p^2(1 - p) + p^3 = 3p^2 - 2p^3. \end{aligned}$$

Ha $p = 0,1$, akkor $p' = 0,028$.

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\text{5 bitnyi üzenet háromszorozva hiba nélkül átmegy}) \\ &= (1 - p')^5 = (1 - 3p^2 + 2p^3)^5. \end{aligned}$$

0,86, ha $p = 0,1$.