

A sztochasztika alapjai

MBNXK262

2. előadás: Szitaformula, geometriai valószínűség, feltételes valószínűség

Kevei Péter

2025/26 tavasz

Ismétlés

A véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleinek halmaza az **eseménytér**, jele Ω .

Az **esemény** olyan a kísérlettel kapcsolatban tett állítás, melynek igaz vagy hamis volta eldönthető a kísérlet lefolytatása után. Az **események halmaza** $\mathcal{A}$, az Ω részhalmazainak egy rendszere. Ha Ω véges, akkor $\mathcal{A} = 2^\Omega$.

Egy $\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ halmazfüggvény *valószínűségi mérték* az $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhetőségi téren, ha

- ▶ $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
- ▶ ha az $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ halmazok (páronként) diszjunktak, akkor

$$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i),$$

azaz a halmazfüggvény σ -additív.

A fenti tulajdonságokkal rendelkező $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ hármast **valószínűségi mezőnek** nevezzük.

A valószínűség tulajdonságai

- ▶ Ha $A_i \cap A_j = \emptyset$, minden $i \neq j$ párra, akkor

$$\mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_n).$$

- ▶ $\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$.
- ▶ $A \subset B \Rightarrow \mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$, és $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$.
- ▶ $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

A valószínűség tulajdonságai

Állítás

Szitaformula:

$$\mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

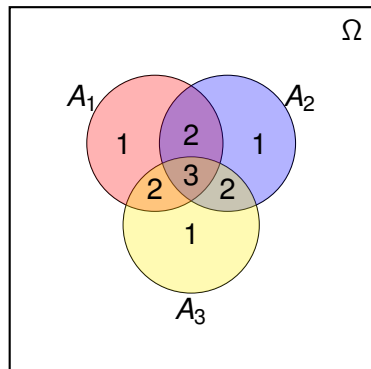
Ez $n = 2$ -re:

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2),$$

A valószínűség tulajdonságai

és $n = 3$ -ra:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(A_3) \\ &\quad - (\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbf{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbf{P}(A_2 \cap A_3)) \\ &\quad + \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).\end{aligned}$$



A valószínűség tulajdonságai

Állítás

$$\mathbf{P}(A \cup B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

Állítás

$$\mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_n).$$

A párosítási probléma

Feladat

Veszünk n darab kártyát 1-től n -ig megszámozva. Összekeverjük, és véletlen sorrendben lerakjuk őket egy sorba. A k -adik helyen párosítás történik, ha a k -adik helyre a k sorszámú kártya kerül. (Tehát véletlen permutációk fixpontjait tekintjük.)

Mennyi a valószínűsége, hogy nem történik párosítás? Jelölje p_n ezt a valószínűséget.

A párosítási probléma: a valószínűségi mező

- ▶ Eseménytér:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\text{az } \{1, \dots, n\} \text{ halmaz permutációi}\} \\ &= \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_1, \dots, \omega_n \text{ az } 1, 2, \dots, n \text{ egy felsorolása}\},\end{aligned}$$

azaz egy $\omega \in \Omega$ esetén $1 \mapsto \omega_1, 2 \mapsto \omega_2, \dots, n \mapsto \omega_n$.

$$|\Omega| = n \times (n-1) \times \dots \times 1 = n!.$$

- ▶ Események: $\mathcal{A} = 2^\Omega$ a hatványhalmaz.
- ▶ Valószínűségi mérték: $\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}.$$

A párosítási probléma

Jelölje A_k azt az eseményt, hogy a k -adik helyen párosítás történik, $k = 1, 2, \dots, n$, és

$$A := \{\text{van párosítás}\}.$$

A párosítási probléma

Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan k darab párosítás történik? Legyen

$$p_{n,k} = \mathbf{P}(n \text{ kártya van, és pontosan } k \text{ párosítás történik}).$$

A párosítási probléma

Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan k darab párosítás történik? Legyen

$p_{n,k} = \mathbf{P}(n \text{ kártya van, és pontosan } k \text{ párosítás történik}).$

Nyilván $p_n = p_{n,0}$. Jelölje $N_{n,k}$ azon kimenetek számát, amikor pontosan k párosítás történik n kártyával. Ezekkel a jelölésekkel $p_m = N_{m,0}/m!$.

$$\begin{aligned} p_{n,k} &= \frac{N_{n,k}}{n!} = \frac{\binom{n}{k} N_{n-k,0}}{n!} = \frac{\binom{n}{k} (n-k)! p_{n-k}}{n!} \\ &= \frac{p_{n-k}}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}. \end{aligned}$$

A párosítási probléma

Az utóbbi alakból rögtön látjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

Geometriai valószínűségi mező

Definíció

Geometriai valószínűségi mező esetén

- ▶ a lehetséges kimenetek halmaza $\Omega = H \subset \mathbb{R}^n$ szép halmaz, aminek a mértéke (hossza, területe, térfogata) pozitív és véges.
- ▶ az események $\mathcal{A}$ halmaza az Ω szép részhalmazai.
- ▶ egy $A \subset H$ esemény valószínűsége arányos a halmaz mértékével, azaz

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(H)},$$

ahol λ az n -dimenziós térfogat (hossz, terület, térfogat).

Példák: $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, $\Omega = [0, 1] \times [0, 2]$,
 $\Omega = B(0, 1) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Példa

Egy négyzet belsejében egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a választott pont közelebb van valamelyik oldalhoz, mint $1/4$?

Feltételes valószínűség

Definíció

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ egy valószínűségi mező, A, B események, és $\mathbf{P}(B) > 0$. Ekkor az A esemény B eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Ha annyi információnk van a véletlen kísérletről, hogy a B esemény bekövetkezett, akkor az A esemény valószínűsége $\mathbf{P}(A|B)$.

Állítás

*Rögzítsünk egy tetszőleges B eseményt, melyre $\mathbf{P}(B) > 0$.
Ekkor $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A|B)$ valószínűségi mérték $\mathcal{A}$ -n.*

Állítás

*Rögzítsünk egy tetszőleges B eseményt, melyre $\mathbf{P}(B) > 0$.
Ekkor $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A|B)$ valószínűségi mérték $\mathcal{A}$ -n.*

Állítás (Szorzási szabály)

Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ tetszőleges olyan események, melyekre $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Ekkor

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \\ \times \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

$n = 2$ -re:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B).$$

Példa

Egy dobozban 12 kék és 3 fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzunk két golyót egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy mindkét golyó kék?

Teljes eseményrendszer

Definíció

A $B_1, B_2, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha

- ▶ minden $i \neq j$ párra $B_i \cap B_j = \emptyset$;
- ▶ $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$.

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer, melyre $\mathbf{P}(B_n) > 0$ minden n -re. Ekkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A|B_n)\mathbf{P}(B_n).$$

Szindbád

Szindbádnak jogában áll N háremhölgy közül egyet kiválasztania oly módon, hogy az előtte egyenként elvonuló hölgyek valamelyikére rámutat.

- ▶ mindig csak az éppen akkor elvonuló lányt választhatja
- ▶ egyértelmű szépségi sorrendje van
- ▶ bármely elvonulási sorrend egyformán valószínű

Stratégia: Szindbád k lányt elenged, majd kiválasztja az elsőt, aki szebb az összes előtte elvonultnál.

Mennyi a valószínűsége, hogy a legszebb hölgyet választja ki? Milyen k esetén lesz ez a valószínűség a legnagyobb, ha N elég nagy?

Szindbád

Jelölje A_i azt az eseményt, hogy a i -edik lány a legszebb, $i = 1, 2, \dots, N$, és B azt, hogy Szindbád a legszebb lányt választja.

Szindbád

Ha $i > k$, akkor Szindbád pontosan akkor választja a legszebbet, ha az első $i - 1$ lány közül a legszebb az első k -ban volt.

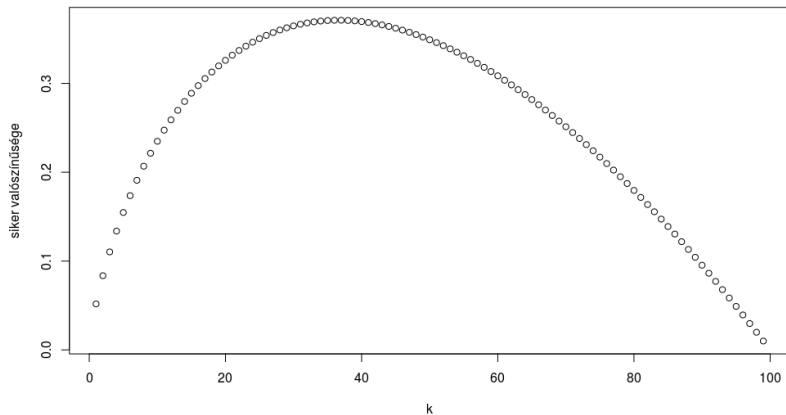
Tehát

$$\mathbf{P}(B|A_i) = \frac{k}{i-1}.$$

Összegezve

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}(A_i) \mathbf{P}(B|A_i) = \sum_{i=k+1}^N \frac{1}{N} \frac{k}{i-1}.$$

Szindbád



ábra: A siker valószínűsége k függvényében, $N = 100$

Szindbád

És ez mennyi?

$$\mathbf{P}(B) = \frac{k}{N} \sum_{i=k}^{N-1} \frac{1}{i}.$$

Integrálközelítő összeg becslése integrállal:

$$\log \frac{N}{k} = \int_k^N \frac{1}{x} dx \leq \sum_{i=k}^{N-1} \frac{1}{i} \leq \int_{k-1}^{N-1} \frac{1}{x} dx = \log \frac{N-1}{k-1}.$$

Tehát

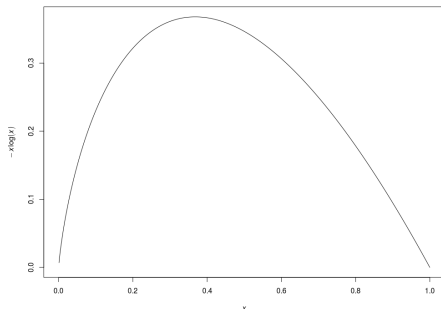
$$\mathbf{P}(B) \sim \frac{k}{N} \log \frac{N}{k}.$$

Szindbád

Hogy válassza Szindbád k -t?

$$\mathbf{P}(B) \sim \frac{k}{N} \log \frac{N}{k}.$$

Az $f(x) = x \log \frac{1}{x}$ függvény maximuma kell $[0, 1]$ -en. HF
Maximumhely $x = 1/e$,
maximum értéke: $1/e$,
tehát $k = \lceil N/e \rceil$.



Szindbád

- ▶ Szindbád megtudja N -et.
- ▶ Elenged $k = \lceil N/e \rceil$ lányt.
- ▶ Majd kiválasztja az elsőt, aki szebb az összes eddiginél.
- ▶ Ekkor nagyjából $1/e \approx 0,368$ valószínűséggel a legszebbet választja.

Bayes-formula

Tétel

*Legyenek A és B olyan események, hogy $\mathbf{P}(A) > 0$, $\mathbf{P}(B) > 0$.
Ekkor*

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Bayes-tétel

Tétel

Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer, melyre $\mathbf{P}(B_n) > 0$ minden n -re. Ekkor tetszőleges pozitív valószínűségű $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén, tetszőleges k -ra

$$\mathbf{P}(B_k|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k)}{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A|B_n)\mathbf{P}(B_n)}.$$

Monty Hall probléma

Egy játékos 3 csukott ajtó közül 1-et választhat. Kettő mögött kecske van, egy mögött autó, de nem tudja, hogy melyik hol van. A játékos autót szeretne nyerni. Miután egy ajtót kiválaszt, a játékvezető kinyitja egy ajtót, amit nem választott a játékos, és ami mögött kecske van. Ezután felajánlja a játékosnak, hogy cserélhet ajtót. Megéri-e váltani?

Monty Hall probléma

Tegyünk fel, hogy a játékos az 1-es ajtót választotta, a játékvezető a 2-est nyitatta ki. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az autó az i -edik ajtó mögött van, B pedig azt, hogy a játékvezető a 2-es ajtót nyitatta ki.