

# A sztochasztika alapjai

## MBNXK262

1. előadás: Valószínűségi mező

Kevei Péter

2025/26 tavasz

# Követelmények

Gyakorlat: folyamatos számonkérésű kurzus

- ▶ részvétel kötelező (legfeljebb 3 hiányzás)
- ▶ 6 dolgozat, legjobb 5 számít
- ▶ egyéb javítási lehetőség nincs, nincs gyakorlati UV
- ▶ 2: 26 -, 3: 32 - , 4: 38 -, 5: 44 -

Előadás: az vizsgázhat, aki teljesíti a gyakorlatot

- ▶ 12 db Coospace teszt az előadáson
- ▶ megajánlott jegy: aki legalább 9 pontot szerez a teszteken, annak a 4-es, 5-ös gyakorlati jegyet megajánlom 3-as, 4-es vizsgajegynek, a 3-as gyakorlati jegyet felajánlom 2-es vizsgajegynek  
előadás részvétel + legalább 3-as gyakorlati jegy  $\Rightarrow$  félévközi előadásjegy
- ▶ Coospace vizsga (elmélet + feladatok)

# A kurzusról

Sztochasztika: véletlen matematikája, véletlen tömegjelenségek törvényszerűségei

Szükséges előismeretek:

- ▶ Kalkulus I. előfeltétel
- ▶ kombinatorika (középiskola, Diszkrét matematika II)
- ▶ műveletek halmazokkal (középiskola, DiMat I)

# Mihez kell?

- ▶ mesterséges intelligencia (24/25 őszi Mestlnt tételsor 30 tétele közül 10 valszám)
- ▶ Neurális hálózatok, Gépi tanulás kurzusok
- ▶ algoritmusok futási idejének elemzése (véletlen input)
- ▶ információelmélet (üzenetküldés zajos csatornán)

# Segédanyag

- ▶ Kevei Péter: A sztochasztika alapjai informatikusoknak, elektronikus jegyzet, előadás anyaga
- ▶ Kevei Péter: A sztochasztika alapjai informatikusoknak feladatgyűjtemény, gyakorlatra feladatok, minden témában néhány részletes megoldásával
- ▶ Szabó Tamás, Szalai Máté, Szűcs Gábor: Youtube videók feladatmegoldásokról
- ▶ Nagy-György Judit, Osztényiné Krauczi Éva, Székely László: Valószínűségszámítás feladatgyűjtemény, Polygon
- ▶ Viharos László: jegyzetvázlat
- ▶ Viharos László: A sztochasztika alapjai, Polygon

# Születésnap probléma

Mekkora a valószínűsége annak, hogy  $n$  ember között van két olyan, akiknek ugyanazon a napon van a születésnapjuk?

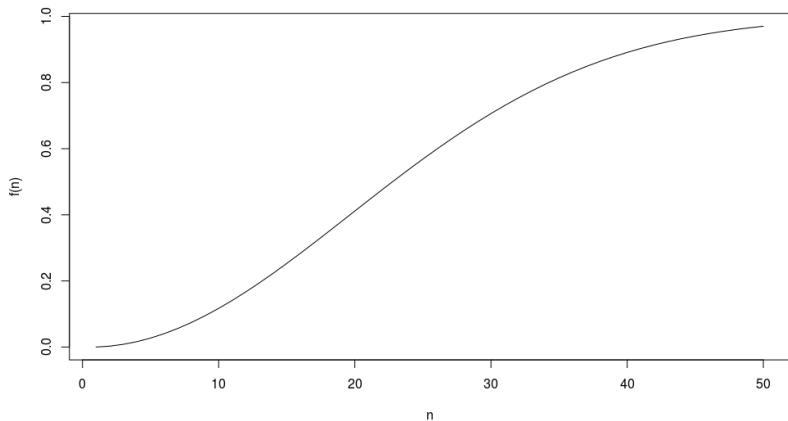


$f(n) = \mathbf{P}(n \text{ ember között van 2, akiknek}$   
ugyanazon a napon van a születésnapja).

# Születésnap probléma

# Születésnap probléma

# Születésnap probléma



## Születésnap probléma - $N$ kimenetel

# Alapfogalmak

**Véletlen (valószínűségi) kísérlet:** lényegében azonos körülmények között tetszőlegesen sokszor megismételhető megfigyelés, melynek többféle kimenetele lehet, és a figyelembe vett körülmények nem határozzák meg egyértelműen a kimenetet.

A véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleinek halmaza az **eseménytér**, jele  $\Omega$ .

# Alapfogalmak

**Véletlen (valószínűségi) kísérlet:** lényegében azonos körülmények között tetszőlegesen sokszor megismételhető megfigyelés, melynek többféle kimenetele lehet, és a figyelembe vett körülmények nem határozzák meg egyértelműen a kimenetet.

A véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleinek halmaza az **eseménytér**, jele  $\Omega$ . Az **esemény** olyan a kísérlettel kapcsolatban tett állítás, melynek igaz vagy hamis volta eldönthető a kísérlet lefolytatása után. Az **események halmaza** az  $\Omega$  részhalmazainak egy olyan rendszere, mely  $\sigma$ -algebra.

## Definíció

Egy  $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$  halmazrendszert akkor nevezünk  **$\sigma$ -algebrának**, ha

- ▶  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ;
- ▶ valahányszor  $A \in \mathcal{A}$ , mindannyiszor  $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$  (azaz a halmazrendszer zárt a komplementerképzésre);
- ▶ valahányszor  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ , mindannyiszor  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$  (azaz a halmazrendszer zárt a megszámlálható unióképzésre).

# Megjegyzés

- ▶ Vegyük észre, hogy a  $\{\emptyset, \Omega\}$  halmazrendszer  $\sigma$ -algebra. Ez a triviális  $\sigma$ -algebra.
- ▶ A  $2^\Omega$  halmazrendszer, az  $\Omega$  hatványhalmaza, azaz az összes részhalmazának halmaza is  $\sigma$ -algebra. Abban az esetben, amikor az  $\Omega$  alaphalmaz véges, akkor az események halmaza általában a hatványhalmaz.

# Események

Események jelölése:  $A, B, A_1, \dots$

- ▶  $|A| = 1 \Leftrightarrow A = \{\omega\}, \omega \in \Omega$ , elemi esemény
- ▶  $\emptyset$  a lehetetlen esemény
- ▶  $\Omega$  a biztos esemény
- ▶  $A^c$  az ellentett esemény
- ▶  $A \cap B$  mindkét esemény bekövetkezik ( $A$  és  $B$ )
- ▶  $A \cup B$  a két esemény közül legalább az egyik bekövetkezik
- ▶  $A \cap B = \emptyset$  a két esemény kizárja egymást
- ▶  $A \setminus B$  a bekövetkezik de  $B$  nem
- ▶  $A \subset B$  az  $A$  esemény maga után vonja  $B$ -t

# Valószínűségi mérték

## Definíció

Egy  $\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  halmazfüggvény *valószínűségi mérték* az  $(\Omega, \mathcal{A})$  mérhetőségi téren, ha

- ▶  $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ ;
- ▶ ha az  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  halmazok (páronként) diszjunktak, akkor

$$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i),$$

azaz a halmazfüggvény  $\sigma$ -additív.

A fenti tulajdonságokkal rendelkező  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  hármaszt **valószínűségi mezőnek** nevezzük.

## Példa

Földobunk egy pénzérmét. Lehetséges kimenetek  $F$ ,  $I$ , tehát

$$\Omega = \{F, I\}.$$

Események

$$\mathcal{A} = 2^\Omega = \{\emptyset, \{F\}, \{I\}, \{F, I\}\}.$$

Ekkor  $|2^\Omega| = 2^{|\Omega|} = 4$ . (Általában egy  $n$  elemű halmaznak  $2^n$  részhalmaza van.)

Szabályos az érme:  $\mathbf{P}(\{F\}) = \mathbf{P}(\{I\}) = \frac{1}{2}$ .

## Példa

Kétszer földobunk egy pénzérmét. Ekkor az eseménytér

$$\Omega = \{(F, F), (F, I), (I, F), (I, I)\}$$

azaz  $|\Omega| = 2^2 = 4$  darab elemi esemény van, és  $|2^\Omega| = 2^4 = 16$  az összes esemény száma és

$$\begin{aligned} 2^\Omega = \{ & \emptyset, \{(F, F)\}, \{(F, I)\}, \{(I, F)\}, \{(I, I)\}, \\ & \{(F, F), (F, I)\}, \{(F, F), (I, F)\}, \{(F, F), (I, I)\}, \\ & \{(F, I), (I, F)\}, \{(F, I), (I, I)\}, \{(I, F), (I, I)\}, \\ & \{(F, F), (F, I), (I, F)\}, \{(F, F), (F, I), (I, I)\}, \\ & \{(F, F), (I, F), (I, I)\}, \{(I, F), (F, I), (I, I)\}, \\ & \{(F, F), (F, I), (I, F), (I, I)\} \}. \end{aligned}$$

## Példa

Kétszer földobunk egy pénzérmét. Ekkor az eseménytér

$$\Omega = \{(F, F), (F, I), (I, F), (I, I)\}$$

azaz  $|\Omega| = 2^2 = 4$  darab elemi esemény van, és  $|2^\Omega| = 2^4 = 16$ . Legyen  $A_i = \{\text{az } i\text{-edik dobás fej}\}$ ,  $i = 1, 2$ .  
Ekkor

$$A_1 = \{(F, F), (F, I)\}, \quad A_2 = \{(F, F), (I, F)\}.$$

Továbbá

$$B = \{\text{csak az 1. fej}\} = \{(F, I)\} = A_1 \cap A_2^c$$

$$C = \{\text{egyik sem fej}\} = \{(I, I)\} = A_1^c \cap A_2^c$$

## Példa

Kétszer földobunk egy *szabályos* pénzérmét. Ekkor az eseménytér

$$\Omega = \{(F, F), (F, I), (I, F), (I, I)\}$$

azaz  $|\Omega| = 2^2 = 4$  darab elemi esemény van, és  $|2^\Omega| = 2^4 = 16$ . Legyen  $A_i = \{\text{az } i\text{-edik dobás fej}\}$ ,  $i = 1, 2$ . Ekkor

$$A_1 = \{(F, F), (F, I)\}, \quad A_2 = \{(F, F), (I, F)\}.$$

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{2}{4}$$

## Példa

Tízszer földobunk egy pénzérmét.

## Példa

Véletlen sorrendben leírjuk a MATEMATIKA szó betűit. Mennyi a valószínűsége, hogy a matematika szót kapjuk?

# Klasszikus valószínűségi mező

## Definíció

Az  $(\Omega, 2^\Omega, \mathbf{P})$  valószínűségi mező **klasszikus**, ha minden kimenetel egyformán valószínű, azaz  $\mathbf{P}(\{\omega\}) = c$  minden  $\omega \in \Omega$  esetén.

Ekkor persze szükségképpen  $c = 1/|\Omega|$ . Tetszőleges  $A$  eseményre  $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$ .

# Újra születésnap

Az eseménytér:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1, 2, \dots, 365\}^n \\ &= \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, 2, \dots, 365\}\}.\end{aligned}$$

Az események halmaza  $\mathcal{A} = 2^\Omega$ , a hatványhalmaz.

$\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ ,  $A \in \mathcal{A}$ :

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$



# Újra születésnap

## Példa

Az eseménytér:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1, 2, \dots, 365\}^n \\ &= \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, 2, \dots, 365\}\}.\end{aligned}$$

Az események halmaza  $\mathcal{A} = 2^\Omega$ , a hatványhalmaz.

A keresett esemény:

$$\begin{aligned}&\{\text{van kettő azonos születésnap}\} \\ &= \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \exists i \neq j : \omega_i = \omega_j\}.\end{aligned}$$

# A valószínűség tulajdonságai

## Állítás

*Legyenek  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ . Ha  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , minden  $i \neq j$  párra, akkor*

$$\mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_n).$$

# A valószínűség tulajdonságai

# A valószínűség tulajdonságai

## Állítás

$$\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A).$$

# A valószínűség tulajdonságai

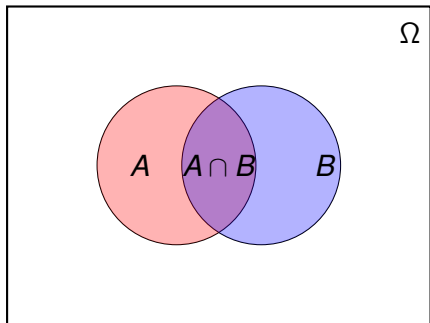
## Állítás

$A \subset B \Rightarrow \mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$ , és  $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$ .

# A valószínűség tulajdonságai

## Állítás

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).$$



# A valószínűség tulajdonságai

## Állítás

*Szitaformula:*

$$\mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

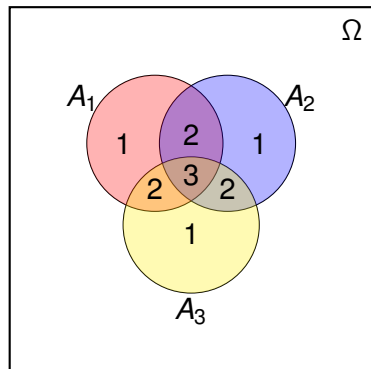
Ez  $n = 2$ -re:

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2),$$

# A valószínűség tulajdonságai

és  $n = 3$ -ra:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(A_3) \\ &\quad - (\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbf{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbf{P}(A_2 \cap A_3)) \\ &\quad + \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).\end{aligned}$$



# A valószínűség tulajdonságai

# A valószínűség tulajdonságai

## Állítás

$$\mathbf{P}(A \cup B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

## Állítás

$$\mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_n).$$

Teljes indukcióval.