

A sztochasztika alapjai

MBNXK262

6. előadás: Folytonos véletlen változók; nevezetes folytonos eloszlások

Kevei Péter

2024/25 tavasz

Ismétlés: véletlen változó, eloszlásfüggvény

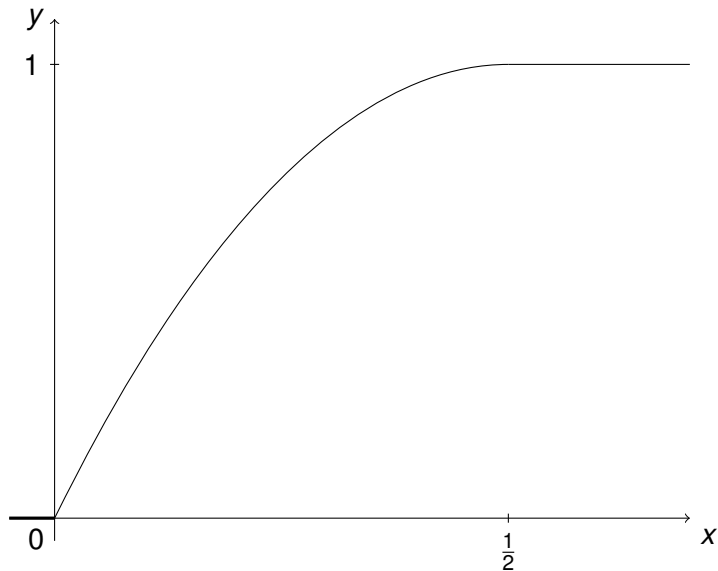
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező

$\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ függvény *véletlen változó*
eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \mathbf{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\}), \quad x \in \mathbb{R}$$

Egységnégyzetben választunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot. Adjuk meg a pont a négyzet határától vett távolságának eloszlását!

Eloszlásfüggvény



Folytonos véletlen változók

Definíció

Egy ξ véletlen változó *folytonos eloszlású*, ha létezik egy nemnegatív f függvény, melyre

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Az $f(x)$ függvény a ξ véletlen változó sűrűségfüggvénye.

A definícióból világos, hogy

$$\mathbf{P}(\xi \in (a, b)) = \mathbf{P}(\xi \in (a, b]) = \int_a^b f(y)dy.$$

Speciálisan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \mathbf{P}(\xi \in \mathbb{R}) = 1, \text{ és } \mathbf{P}(\xi = x) = \int_x^x f(y)dy = 0.$$

Várható érték, szórás

ξ folytonos eloszlású, ha

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$ a ξ sűrűségfüggvénye.

Várható érték

$$\mathbf{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy,$$

szórásnégyzet

$$\mathbf{D}^2(\xi) = \mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}(\xi))^2] = \mathbf{E}(\xi^2) - (\mathbf{E}(\xi))^2$$

Példa

Egységnégyzetben választunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot. Adjuk meg a pont a négyzet határától vett távolságának eloszlását!

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbf{P}(\xi < x) = \mathbf{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\}) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 4x(1 - x), & \text{ha } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1, & \text{ha } x \geq 1/2, \end{cases} \\ &= \int_{-\infty}^x f(y)dy, \end{aligned}$$

ahol

$$f(y) = \begin{cases} 4 - 8y, & \text{ha } y \in [0, 1/2], \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

$$f(y) = \begin{cases} 4 - 8y, & \text{ha } y \in [0, 1/2], \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

$$\mathbf{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{1/2} x(4 - 8x)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

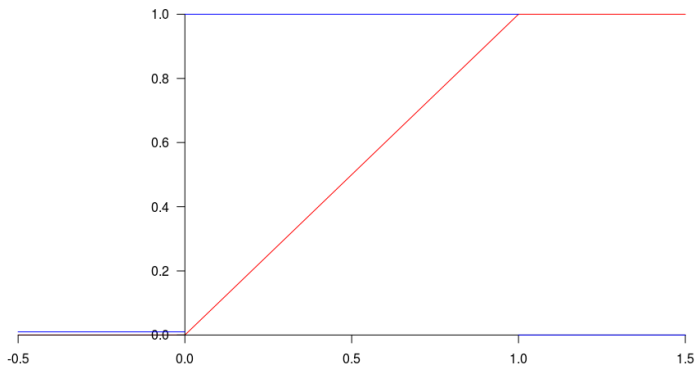
$$\mathbf{E}(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{1/2} x^2(4 - 8x)dx = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}.$$

$$\text{Tehát } \mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\frac{1}{24} - \frac{1}{36}} \approx 0,118.$$

Egyenletes eloszlás

ξ egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumon, $\xi \sim \text{Egy}(a, b)$,
 $-\infty < a < b < \infty$, ha sűrűségfüggvénye

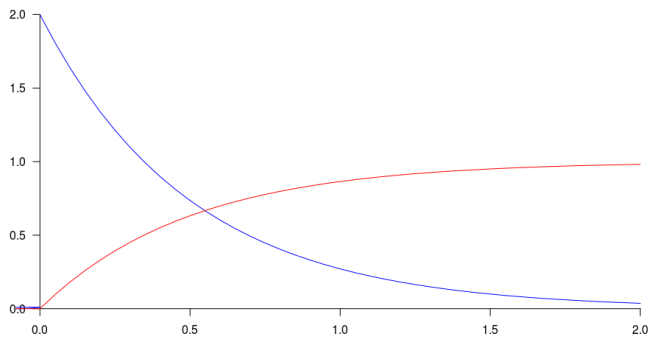
$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } y \in (a, b), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$



Exponenciális eloszlás

ξ λ -paraméterű exponenciális eloszlású, $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, ha sűrűségfüggvénye

$$f(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$



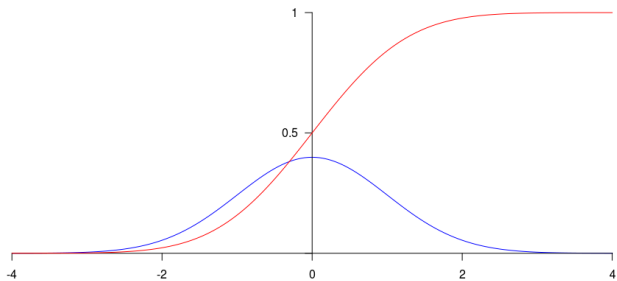
Momentumok

Örökifjú

Normális eloszlás

ξ normális eloszlású μ és σ^2 paraméterekkel, $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$,
 $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$, ha sűrűségfüggvénye

$$f_{\mu, \sigma}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$



Standardizálás

Állítás

Ha $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, akkor $(\xi - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$.

[illegible]

$\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ és $Z \sim N(0, 1)$, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|\xi - \mu| \leq \lambda\sigma) &= \mathbf{P}(|Z| \leq \lambda) \\ &= \Phi(\lambda) - \Phi(-\lambda) \\ &= 2\Phi(\lambda) - 1 \\ &= \begin{cases} 0,6827, & \lambda = 1, \\ 0,9545, & \lambda = 2, \\ 0,9973, & \lambda = 3, \\ 0,9999, & \lambda = 4. \end{cases}\end{aligned}$$

Várható érték

Definíció

ξ diszkrét $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel. ξ *várható értéke*

$$\mathbf{E}(\xi) = \sum_i x_i \mathbf{P}(\xi = x_i),$$

ha $\sum_i |x_i| \mathbf{P}(\xi = x_i) < \infty$.

Ha ξ folytonos $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel, akkor ξ várható értéke

$$\mathbf{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy,$$

ha $\int_{-\infty}^{\infty} |y| f(y) dy < \infty$.

Várható érték tulajdonságai

Állítás

ξ, η véletlen változók, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Ekkor

$$\mathbf{E}(g(\xi)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \mathbf{P}(\xi = x_i), \text{ ill. } \mathbf{E}(g(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(y) dy,$$

ahol $f(x)$ az ξ sűrűségfüggvénye, és

$$\mathbf{E}(h(\xi, \eta)) = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j) \mathbf{P}(\xi = x_i, \eta = y_j).$$

Várható érték tulajdonságai

Állítás

A várható érték lineáris, azaz tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ állandókra

$$\mathbf{E}(a\xi + b) = a\mathbf{E}(\xi) + b.$$

Várható érték tulajdonságai

Állítás

Ha $a \leq \xi \leq b$, akkor $a \leq \mathbf{E}(\xi) \leq b$ tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ számok esetén.

Várható érték tulajdonságai

Állítás

$$\mathbf{E}(\xi + \eta) = \mathbf{E}(\xi) + \mathbf{E}(\eta).$$

Várható érték tulajdonságai

Állítás

Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ véletlen változók, akkor

$$\mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(\xi_i).$$

Teszt

Geometriai valószínűségi mezőnél milyen eloszlású véletlen változók kerülnek elő?

- ▶ binomiális
- ▶ exponenciális
- ▶ geometriai
- ▶ egyenletes

Teszt

A texphone cég telefonos ügyfélszolgálatán a várakozási idő percben mérve exponenciális eloszlást követ $1/2$ paraméterrel. Mennyi a valószínűsége, hogy még 2 percnél többet kell várunk, feltéve, hogy már 5 perce várunk?

- ▶ $e^{-7/2}$
- ▶ $e^{-1/2}$
- ▶ $1 - e^{-1}$
- ▶ más

Teszt

Legyen $f(x) = c$, $x \in [0, 1]$, különben 0. Ha f sűrűségfüggvény, akkor mennyi lehet c értéke?

- ▶ csak 0
- ▶ tetszőleges pozitív szám
- ▶ 0 vagy 1
- ▶ csak 1

Teszt

Melyik biztosan NEM normális eloszlású (pontosabban nem közelíthető jól azzal)?

- ▶ az euró árfolyama forintban 2025. május 2-án
- ▶ tűzesetek száma Szegeden májusban
- ▶ egy véletlenszerűen választott fűszál hossza a Rerrich Béla téren
- ▶ egy véletlenszerűen kiválasztott informatikus hallgató testtömege kg-ban