

A sztochasztika alapjai

MBNXK262

3. előadás: Feltételes valószínűség, függetlenség

Kevei Péter

2024/25 tavasz

Feltételes valószínűség

Definíció

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ egy valószínűségi mező, A, B események, és $\mathbf{P}(B) > 0$. Ekkor az A esemény B eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Ha annyi információnk van a véletlen kísérletről, hogy a B esemény bekövetkezett, akkor az A esemény valószínűsége $\mathbf{P}(A|B)$.

Állítás

*Rögzítsünk egy tetszőleges B eseményt, melyre $\mathbf{P}(B) > 0$.
Ekkor $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A|B)$ valószínűségi mérték $\mathcal{A}$ -n.*

Állítás

*Rögzítsünk egy tetszőleges B eseményt, melyre $\mathbf{P}(B) > 0$.
Ekkor $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A|B)$ valószínűségi mérték $\mathcal{A}$ -n.*

Állítás (Szorzási szabály)

Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ tetszőleges olyan események, melyekre $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Ekkor

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \\ \times \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

$n = 2$ -re:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B).$$

Példa

Egy dobozban 12 kék és 3 fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzunk két golyót egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy mindkét golyó kék?

Jelölje K_i azt, hogy az i -edik kék. Ekkor

$$\mathbf{P}(K_1 \cap K_2) =$$

Teljes eseményrendszer

Definíció

A $B_1, B_2, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha

- ▶ minden $i \neq j$ párra $B_i \cap B_j = \emptyset$;
- ▶ $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$.

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer, melyre $\mathbf{P}(B_n) > 0$ minden n -re. Ekkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A|B_n)\mathbf{P}(B_n).$$

Monty Hall probléma

- ▶ játékos: 3 csukott ajtó közül 1-et választ
- ▶ 2 mögött kecske, 1 mögött autó
- ▶ Miután választ, a játékvezető kinyitja egy ajtót, amit nem választott a játékos, és ami mögött kecske van.
- ▶ Ezután felajánlja a játékosnak, hogy cserélhet ajtót.
- ▶ Megéri-e váltani?

<https://montyhall.io/>

Monty Hall probléma

Tfh a játékos az 1-est választotta, a játékvezető a 2-est nyitatta ki. A_i : az autó az i -edik ajtó mögött van, B : játékvezető a 2-es ajtót nyitatta ki.

Szindbád

Szindbádnak jogában áll N háremhölgy közül egyet kiválasztania oly módon, hogy az előtte egyenként elvonuló hölgyek valamelyikére rámutat.

- ▶ mindig csak az éppen akkor elvonuló lányt választhatja
- ▶ egyértelmű szépségi sorrendje van
- ▶ bármely elvonulási sorrend egyformán valószínű

Stratégia: Szindbád k lányt elenged, majd kiválasztja az elsőt, aki szebb az összes előtte elvonultnál.

Mennyi a valószínűsége, hogy a legszebb hölgyet választja ki? Milyen k esetén lesz ez a valószínűség a legnagyobb, ha N elég nagy?

Szindbád

Jelölje A_i azt az eseményt, hogy a i -edik lány a legszebb, $i = 1, 2, \dots, N$, és B azt, hogy Szindbád a legszebb lányt választja.

Szindbád

Ha $i > k$, akkor Szindbád pontosan akkor választja a legszebbet, ha az első $i - 1$ lány közül a legszebb az első k -ban volt.

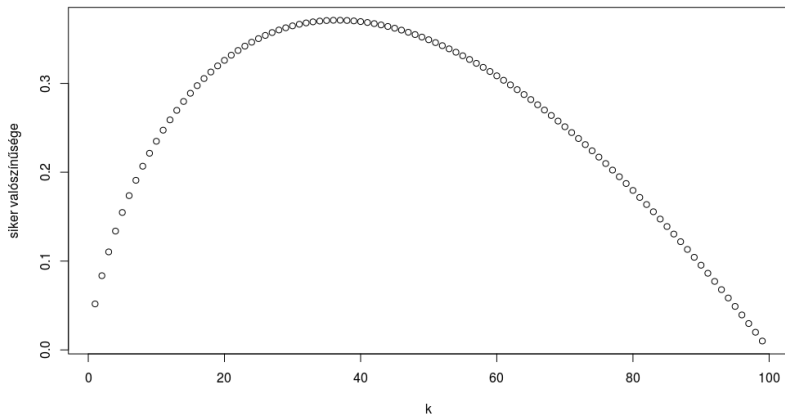
Tehát

$$\mathbf{P}(B|A_i) = \frac{k}{i-1}.$$

Összegezve

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}(A_i) \mathbf{P}(B|A_i) = \sum_{i=k+1}^N \frac{1}{N} \frac{k}{i-1}.$$

Szindbád



ábra: A siker valószínűsége k függvényében, $N = 100$

Szindbád

És ez mennyi?

$$\mathbf{P}(B) = \frac{k}{N} \sum_{i=k}^{N-1} \frac{1}{i}.$$

Integrálközelítő összeg becslése integrállal:

$$\log \frac{N}{k} = \int_k^N \frac{1}{x} dx \leq \sum_{i=k}^{N-1} \frac{1}{i} \leq \int_{k-1}^{N-1} \frac{1}{x} dx = \log \frac{N-1}{k-1}.$$

Tehát

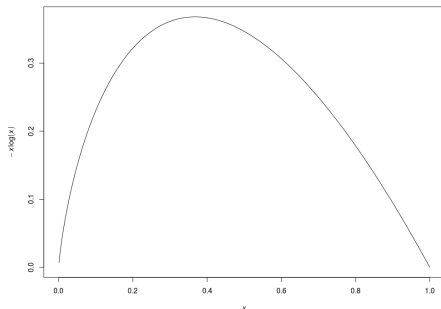
$$\mathbf{P}(B) \sim \frac{k}{N} \log \frac{N}{k}.$$

Szindbád

Hogy válassza Szindbád k -t?

$$\mathbf{P}(B) \sim \frac{k}{N} \log \frac{N}{k}.$$

Az $f(x) = x \log \frac{1}{x}$ függvény maximuma kell $[0, 1]$ -en. HF
Maximumhely $x = 1/e$,
maximum értéke: $1/e$,
tehát $k = \lceil N/e \rceil$.



Szindbád

- ▶ Szindbád megtudja N -et.
- ▶ Elenged $k = \lfloor N/e \rfloor$ lányt.
- ▶ Majd kiválasztja az elsőt, aki szebb az összes eddiginél.
- ▶ Ekkor nagyjából $1/e \approx 0,368$ valószínűséggel a legszebbet választja.

Bayes-formula

Tétel

*Legyenek A és B olyan események, hogy $\mathbf{P}(A) > 0$, $\mathbf{P}(B) > 0$.
Ekkor*

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Bayes-tétel

Tétel

Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer, melyre $\mathbf{P}(B_n) > 0$ minden n -re. Ekkor tetszőleges pozitív valószínűségű $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén, tetszőleges k -ra

$$\mathbf{P}(B_k|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k)}{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A|B_n)\mathbf{P}(B_n)}.$$

Doppingteszt

- ▶ doppingolók 99%-ánál pozitív
- ▶ nem doppingoló 1%-nál tévesen pozitív

Tfh a sportolók 1%-a doppingol. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott sportoló

(a) doppingtesztje pozitív?

(b) doppingolt, ha tudjuk, hogy a doppingtesztje pozitív?

T : a teszt eredménye pozitív; D : a sportoló doppingolt

Doppingteszt

T : a teszt eredménye pozitív; D : a sportoló doppingolt

Véletlenített válaszadás

- ▶ Kérdőívet készítünk, melyen kínos kérdések is vannak.
- ▶ A kínos kérdésnél a kitöltő feldob egy (szabályos) pénzérmét. Ha fejet kap, akkor válaszoljon igennel, ha írást, akkor válaszoljon arra a kérdésre, hogy énekel-e a zuhany alatt.

Az emberek (ismeretlen!) p hányada énekel a zuhany alatt.

- ▶ Mennyi a valószínűsége, hogy a teszt kitöltése során valaki igennel válaszol?
- ▶ Az igen válaszok arányából hogy következtethetünk a valódi p arányra?

Véletlenített válaszadás

I : a válasz igen, A a kitöltő énekel a zuhany alatt. $\mathbf{P}(A) = p$

$$\mathbf{P}(I|A) =$$

$$\mathbf{P}(I|A^c) =$$

$$\mathbf{P}(I) =$$

Függetlenség

A B esemény bekövetkezése nem befolyásolja az A bekövetkezését, ha

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A),$$

ahonnan $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

Definíció

Az A és B események függetlenek, ha $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

Definíció

Az A és B események függetlenek, ha $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

- ▶ a függetlenség szimmetrikus
- ▶ a biztos és a lehetetlen eseménytől minden esemény független HF

Példa

Francia kártyapakliból húzunk egy lapot. D : dámát húzunk, K kőrt húzunk.

Ekkor $D \cap K$ az az esemény, hogy a kőr dámát húztuk ki, így $\mathbf{P}(D \cap K) = 1/52$. Ugyanakkor $\mathbf{P}(D) = 4/52 = 1/13$ és $\mathbf{P}(K) = 13/52 = 1/4$, azaz a két esemény független.

Három esemény függetlensége

Definíció

Az A, B, C események **függetlenek**, ha

- ▶ $\mathbf{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$,
- ▶ $\mathbf{P(A \cap C) = P(A)P(C)}$,
- ▶ $\mathbf{P(B \cap C) = P(B)P(C)}$,
- ▶ és $\mathbf{P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)}$.

Továbbá, az A, B, C események **páronként függetlenek**, ha bármely kettő független.

Több esemény függetlensége

Definíció

Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események **függetlenek**, ha bármely $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ és $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ esetén

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \dots \mathbf{P}(A_{i_k}).$$

Végtelen sok esemény akkor független, ha közülük bármely véges sok független.

Állítás

Ha az $A_1, \dots, A_n$ események függetlenek, akkor tetszőleges $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén az $\{A_1, \dots, A_k\}$ eseményekből ill. az $\{A_{k+1}, \dots, A_n\}$ eseményekből alkotott események függetlenek.

Pl. ha A, B, C, D független események, akkor $A \cup B$ és $C \cap D$ is függetlenek. HF

Bináris szimmetrikus csatorna

- ▶ 0 – 1 sorozatot akarunk küldeni zajos csatornán
- ▶ a csatorna minden bitet egymástól függetlenül p valószínűséggel elront

$P(5 \text{ bit hiba nélkül átmegy}) =$

Ha $p = 0,1$, akkor ez 0,59, míg $p = 0,2$ esetén csak 0,33.

Bináris szimmetrikus csatorna

Minden bitet háromszor küldünk el, tehát a 0 helyett 000, az 1 helyett 111.

$$\begin{aligned} p' &= \mathbf{P}(\text{hibásan dekódol}) \\ &= \mathbf{P}(\text{pontosan 2 bit fordul át}) + \mathbf{P}(\text{mindhárom átfordul}) \\ &= \end{aligned}$$

Ha $p=0,1$, akkor $p'=0,028$.

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\text{5 bitnyi üzenet háromszorozva hiba nélkül átmegy}) \\ &= (1 - p')^5 = (1 - 3p^2 + 2p^3)^5. \end{aligned}$$

0,86, ha $p=0,1$.

Teszt

Szabályos dobókockával dobunk. Legyen A az az esemény, hogy páratlan számot dobunk, B pedig az, hogy 1-est.

- ▶ $\mathbf{P}(A|B) = 1$
- ▶ $\mathbf{P}(B|A) = 1$
- ▶ mindkettő
- ▶ egyik sem

Teszt

52 lapos franciakártyából húzok egy lapot. Feltéve, hogy pirosat húzok (kőrt vagy kárót), a treff húzásának valószínűsége

- ▶ nem definiált
- ▶ nőtt
- ▶ csökkent
- ▶ nem változott

Teszt

A Monty Hall feladatnál tegyük fel, hogy a játékos az 1-es ajtót választja. Legyen B az az esemény, hogy a játékvezető a 3-as ajtót nyitja ki, A_i , $i = 1, 2, 3$, pedig az, hogy az autó az i -edik ajtó mögött van. Az, hogy megéri váltani, formulával azt jelenti, hogy

- ▶ $\mathbf{P(A_1|B) < P(A_2|B)}$
- ▶ $\mathbf{P(B|A_1) < P(B|A_2)}$
- ▶ $\mathbf{P(A_2) > P(A_1)}$
- ▶ $\mathbf{P(A_1|B) > P(A_2|B)}$

Teszt

Ha $N = 100$ a háremhölgyek száma, akkor Szindbád optimális stratégiája az, hogy

- ▶ elenged 37-et és kiválasztja a 38-adikat
- ▶ kiválasztja a legszebbet
- ▶ kiválasztja az utolsót
- ▶ elenged 37-et és kiválasztja az elsőt, aki szebb az eddigieknél