

A sztochasztika alapjai

MBNXK262

1. előadás: Valószínűségi mező

Kevei Péter

2024/25 tavasz

Követelmények

Gyakorlat: folyamatos számonkérésű kurzus

- ▶ részvétel kötelező (legfeljebb 3 hiányzás)
- ▶ 6 dolgozat, legjobb 5 számít
- ▶ egyéb javítási lehetőség nincs
- ▶ nincs gyakorlati UV

Előadás: az vizsgázhat, aki teljesíti a gyakorlatot

- ▶ 12 db 5 pontos Coospace teszt - legjobb 10 számít
- ▶ megajánlott jegy: aki legalább 30 pontot szerez a teszteken, annak a 4-es, 5-ös gyakorlati jegyet megajánlom 3-as, 4-es vizsgajegynek, a 3-as gyakorlati jegyet felajánlom 2-es vizsgajegynek
- ▶ Coospace vizsga (elmélet + feladatok) 75%, Coospace tesztek 25%

A kurzusról

Sztochasztika: véletlen matematikája, véletlen tömegjelenségek törvényszerűségei

Szükséges előismeretek:

- ▶ Kalkulus I. előfeltétel
- ▶ kombinatorika (középiskola, Diszkrét matematika II)
- ▶ műveletek halmazokkal (középiskola, DiMat I)

Mihez kell?

- ▶ Alkalmazott statisztika tárgy előfeltétele
- ▶ mesterséges intelligencia (24/25 őszi MestInt tételsor 30 tétele közül 10 valszám)
- ▶ Neurális hálózatok, Gépi tanulás kurzusok
- ▶ algoritmusok futási idejének elemzése (véletlen input)
- ▶ információelmélet (üzenetküldés zajos csatornán)

Segédanyag

- ▶ Kevei Péter: A sztochasztika alapjai informatikusoknak, elektronikus jegyzet, előadás anyaga
- ▶ Kevei Péter: A sztochasztika alapjai informatikusoknak feladatgyűjtemény, gyakorlatra feladatok, minden témában néhány részletes megoldásával
- ▶ Szabó Tamás, Szalai Máté, Szűcs Gábor: Youtube videók feladatmegoldásokról
- ▶ Viharos László: jegyzetvázlat
- ▶ Viharos László: A sztochasztika alapjai, Polygon

Születésnap probléma

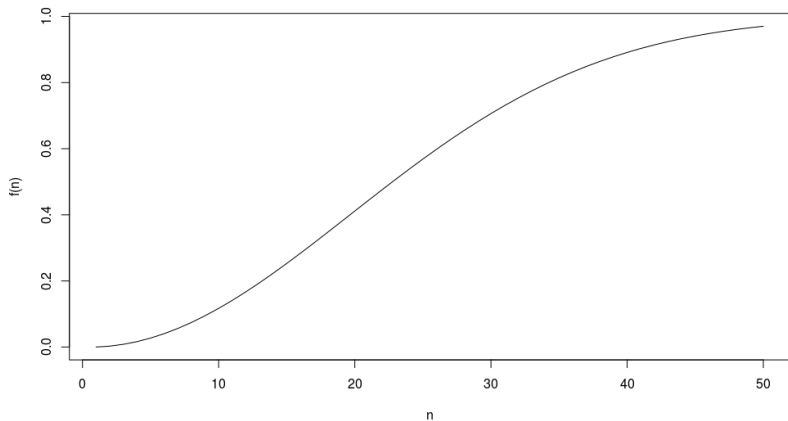
Mekkora a valószínűsége annak, hogy n ember között van két olyan, akiknek ugyanazon a napon van a születésnapjuk?



$f(n) = \mathbf{P}(n \text{ ember között van } 2, \text{ akiknek}$
ugyanazon a napon van a születésnapja).

Születésnap probléma

Születésnap probléma



Születésnap probléma - N kimenetel

Alapfogalmak

Véletlen (valószínűségi) kísérlet: lényegében azonos körülmények között tetszőlegesen sokszor megismételhető megfigyelés, melynek többféle kimenetele lehet, és a figyelembe vett körülmények nem határozzák meg egyértelműen a kimenetet.

A véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleinek halmaza az **eseménytér**, jele Ω .

Alapfogalmak

Véletlen (valószínűségi) kísérlet: lényegében azonos körülmények között tetszőlegesen sokszor megismételhető megfigyelés, melynek többféle kimenetele lehet, és a figyelembe vett körülmények nem határozzák meg egyértelműen a kimenetet.

A véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleinek halmaza az **eseménytér**, jele Ω . Az **esemény** olyan a kísérlettel kapcsolatban tett állítás, melynek igaz vagy hamis volta eldönthető a kísérlet lefolytatása után. Az **események halmaza** az Ω részhalmazainak egy olyan rendszere, mely σ -algebra. Az $(\Omega, \mathcal{A})$ párt mérhetőségi térnek nevezzük.

Definíció

Egy $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ halmazrendszert akkor nevezünk **σ -algebrának**, ha

- ▶ $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- ▶ valahányszor $A \in \mathcal{A}$, mindannyiszor $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (azaz a halmazrendszer zárt a komplementerképzésre);
- ▶ valahányszor $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, mindannyiszor $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ (azaz a halmazrendszer zárt a megszámlálható unióképzésre).

Megjegyzés

- ▶ Vegyük észre, hogy a $\{\emptyset, \Omega\}$ halmazrendszer σ -algebra. Ez a triviális σ -algebra.
- ▶ A 2^Ω halmazrendszer, az Ω hatványhalmaza, azaz az összes részhalmazának halmaza is σ -algebra. Abban az esetben, amikor az Ω alaphalmaz véges, akkor az események halmaza általában a hatványhalmaz.

Események

Események jelölése: $A, B, A_1, \dots$

- ▶ $|A| = 1 \Leftrightarrow A = \{\omega\}, \omega \in \Omega$, elemi esemény
- ▶ $\emptyset$ a lehetetlen esemény
- ▶ Ω a biztos esemény
- ▶ A^c az ellentett esemény
- ▶ $A \cap B$ mindkét esemény bekövetkezik (A és B)
- ▶ $A \cup B$ a két esemény közül legalább az egyik bekövetkezik
- ▶ $A \cap B = \emptyset$ a két esemény kizárja egymást
- ▶ $A \setminus B$ a bekövetkezik de B nem
- ▶ $A \subset B$ az A esemény maga után vonja B -t

Valószínűségi mérték

Definíció

Egy $\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ halmazfüggvény *valószínűségi mérték* az $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhetőségi téren, ha

- ▶ $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
- ▶ ha az $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ halmazok (páronként) diszjunktak, akkor

$$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i),$$

azaz a halmazfüggvény σ -additív.

A fenti tulajdonságokkal rendelkező $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ hármaszt **valószínűségi mezőnek** nevezzük.

Példa

Földobunk egy pénzérmét. Lehetséges kimenetek F , I , tehát

$$\Omega = \{F, I\}.$$

Események

$$\mathcal{A} = 2^\Omega = \{\emptyset, \{F\}, \{I\}, \{F, I\}\}.$$

Ekkor $|2^\Omega| = 2^{|\Omega|} = 4$. (Általában egy n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van.)

Szabályos az érme: $\mathbf{P}(\{F\}) = \mathbf{P}(\{I\}) = \frac{1}{2}$.

Példa

Kétszer földobunk egy pénzérmét. Ekkor az eseménytér

$$\Omega = \{(F, F), (F, I), (I, F), (I, I)\}$$

azaz $|\Omega| = 2^2 = 4$ darab elemi esemény van, és $|2^\Omega| = 2^4 = 16$ az összes esemény száma és

$$\begin{aligned} 2^\Omega = \{ & \emptyset, \{(F, F)\}, \{(F, I)\}, \{(I, F)\}, \{(I, I)\}, \\ & \{(F, F), (F, I)\}, \{(F, F), (I, F)\}, \{(F, F), (I, I)\}, \\ & \{(F, I), (I, F)\}, \{(F, I), (I, I)\}, \{(I, F), (I, I)\}, \\ & \{(F, F), (F, I), (I, F)\}, \{(F, F), (F, I), (I, I)\}, \\ & \{(F, F), (I, F), (I, I)\}, \{(I, F), (F, I), (I, I)\}, \\ & \{(F, F), (F, I), (I, F), (I, I)\} \}. \end{aligned}$$

Példa

Kétszer földobunk egy pénzérmét. Ekkor az eseménytér

$$\Omega = \{(F, F), (F, I), (I, F), (I, I)\}$$

azaz $|\Omega| = 2^2 = 4$ darab elemi esemény van, és $|2^\Omega| = 2^4 = 16$. Legyen $A_i = \{\text{az } i\text{-edik dobás fej}\}$, $i = 1, 2$.
Ekkor

$$A_1 = \{(F, F), (F, I)\}, \quad A_2 = \{(F, F), (I, F)\}.$$

Továbbá

$$B = \{\text{csak az 1. fej}\} = \{(F, I)\} = A_1 \cap A_2^c$$

$$C = \{\text{egyik sem fej}\} = \{(I, I)\} = A_1^c \cap A_2^c$$

Példa

Kétszer földobunk egy *szabályos* pénzérmét. Ekkor az eseménytér

$$\Omega = \{(F, F), (F, I), (I, F), (I, I)\}$$

azaz $|\Omega| = 2^2 = 4$ darab elemi esemény van, és $|2^\Omega| = 2^4 = 16$. Legyen $A_i = \{\text{az } i\text{-edik dobás fej}\}$, $i = 1, 2$. Ekkor

$$A_1 = \{(F, F), (F, I)\}, \quad A_2 = \{(F, F), (I, F)\}.$$

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{2}{4}$$

Példa

Tízszer földobunk egy pénzérmét.

Példa

Véletlen sorrendben leírjuk a MATEMATIKA szó betűit. Mennyi a valószínűsége, hogy a matematika szót kapjuk?

Klasszikus valószínűségi mező

Definíció

Az $(\Omega, 2^\Omega, \mathbf{P})$ valószínűségi mező **klasszikus**, ha minden kimenetel egyformán valószínű, azaz $\mathbf{P}(\{\omega\}) = c$ minden $\omega \in \Omega$ esetén.

Ekkor persze szükségképpen $c = 1/|\Omega|$. Tetszőleges A eseményre $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$.

Újra születésnap

Az eseménytér:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1, 2, \dots, 365\}^n \\ &= \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, 2, \dots, 365\}\}.\end{aligned}$$

Az események halmaza $\mathcal{A} = 2^\Omega$, a hatványhalmaz.

$\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$, $A \in \mathcal{A}$:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$



Újra születésnap

Példa

Az eseménytér:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1, 2, \dots, 365\}^n \\ &= \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, 2, \dots, 365\}\}.\end{aligned}$$

Az események halmaza $\mathcal{A} = 2^\Omega$, a hatványhalmaz.

A keresett esemény:

$$\begin{aligned}&\{\text{van kettő azonos születésnap}\} \\ &= \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \exists i \neq j : \omega_i = \omega_j\}.\end{aligned}$$

A valószínűség tulajdonságai

Állítás

Legyenek $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$. Ha $A_i \cap A_j = \emptyset$, minden $i \neq j$ párra, akkor

$$\mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_n).$$

A valószínűség tulajdonságai

A valószínűség tulajdonságai

Állítás

$$\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A).$$

A valószínűség tulajdonságai

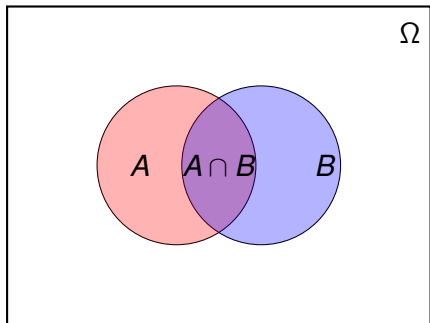
Állítás

$A \subset B \Rightarrow \mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$, és $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$.

A valószínűség tulajdonságai

Állítás

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).$$



A valószínűség tulajdonságai

Állítás

Szitaformula:

$$\mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

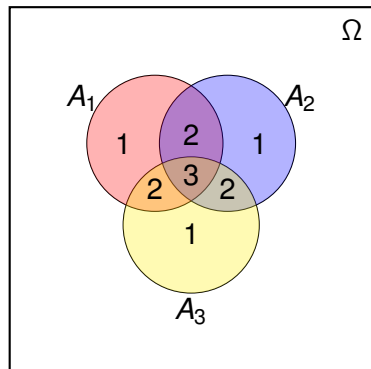
Ez $n = 2$ -re:

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2),$$

A valószínűség tulajdonságai

és $n = 3$ -ra:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(A_3) \\ &\quad - (\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbf{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbf{P}(A_2 \cap A_3)) \\ &\quad + \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).\end{aligned}$$



A valószínűség tulajdonságai

A valószínűség tulajdonságai

Állítás

$$\mathbf{P}(A \cup B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

Állítás

$$\mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_n).$$

Teljes indukcióval.