

A sztochasztika alapjai

MBNXK262

12. előadás: Konfidenciaintervallumok, próbák

2023/24 tavasz

Konfidenciaintervallumok

Definíció

A $(T_1(\xi), T_2(\xi))$ statisztikapárral definiált intervallum *legalább* $1 - \varepsilon$ megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum a $\psi(\theta)$ paraméterre, ha

$$\mathbf{P}_\theta(T_1(\xi) < \psi(\theta) < T_2(\xi)) \geq 1 - \varepsilon, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

ahol $\varepsilon > 0$ előre adott kicsi szám.

Konfidenciaintervallum normális eloszlás várható értékére ismert szórás esetén

Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n \sim N(\mu, \sigma_0^2)$ független véletlen változók, ahol μ az ismeretlen paraméter, σ_0^2 ismert. Megadunk μ -re pontosan $1 - \varepsilon$ megbízhatósági szintű konfidenciaintervallumot.

Konfidenciaintervallum

Tétel

Ha ξ, η független normális eloszlású véletlen változók akkor $\xi + \eta$ is normális eloszlású.

Konfidenciaintervallum – ismeretlen szórás

σ_0 ismert: $\left(\bar{\xi} - \frac{u_{\varepsilon/2}\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{\xi} + \frac{u_{\varepsilon/2}\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$

σ ismeretlen, becsüljük

$$V_n^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi}_n)^2$$

Definíció

$\eta, \eta_1, \dots, \eta_n$ független standard normálisok

$$T_n = \frac{\eta}{\sqrt{(\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2)/n}}$$

változó n szabadsági fokú Student-eloszlású (vagy t -eloszlású) véletlen változó. Eloszlásfüggvénye $\Phi_n(x) = \mathbf{P}(T_n < x)$.

Tétel

$\xi_1, \dots, \xi_n$ független normális eloszlású véletlen változók μ várható értékkel és σ szórással. Ekkor az $\bar{\xi}_n$ mintaátlag és a V_n empirikus szórásnégyzet függetlenek. Továbbá a

$$\sqrt{n} \frac{\bar{\xi}_n - \mu}{\sqrt{V_n^*}}$$

hányados $n - 1$ szabadsági fokú Student-eloszlású.

Keressük a konfidenciaintervallumot $[\bar{\xi}_n - r_\varepsilon, \bar{\xi}_n + r_\varepsilon]$ alakban.
Ekkor

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}_\mu(\bar{\xi} - r_\varepsilon < \mu < \bar{\xi} + r_\varepsilon) \\
 &= \mathbf{P}_\mu \left(-\frac{r_\varepsilon}{\sqrt{V_n^*}/\sqrt{n}} < \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sqrt{V_n^*}/\sqrt{n}} < \frac{r_\varepsilon}{\sqrt{V_n^*}/\sqrt{n}} \right) \\
 &= \Phi_{n-1} \left(\frac{\sqrt{n}r_\varepsilon}{\sqrt{V_n^*}} \right) - \Phi_{n-1} \left(-\frac{\sqrt{n}r_\varepsilon}{\sqrt{V_n^*}} \right) \\
 &= 2\Phi_{n-1} \left(\frac{\sqrt{n}r_\varepsilon}{\sqrt{V_n^*}} \right) - 1 = 1 - \varepsilon,
 \end{aligned}$$

azaz $\Phi_{n-1} \left(\frac{\sqrt{n}r_\varepsilon}{\sqrt{V_n^*}} \right) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$

A keresett $1 - \varepsilon$ megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum

$$\left(\bar{\xi} - \frac{t_{\varepsilon/2} \sqrt{V_n^*}}{\sqrt{n}}, \bar{\xi} + \frac{t_{\varepsilon/2} \sqrt{V_n^*}}{\sqrt{n}} \right).$$

Hipotézisvizsgálat

$\xi_1, \dots, \xi_n$ független, normálisok, σ_0 ismert szórással, és *ismeretlen* μ várható értékkel. Azt szeretnénk eldönteni, hogy igaz-e hogy a várható érték μ_0 .

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

Az

$$u = \frac{\bar{\xi}_n - \mu_0}{\sigma_0} \sqrt{n}$$

standard normális a H_0 fennállása esetén. Ha H_1 áll fenn, akkor u *nem* standard normális. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített szignifikanciaszint. Az $u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(1 - \varepsilon/2)$ jelöléssel,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_{\mu_0} \left(\mu_0 \in \left(\bar{\xi}_n - \frac{u_{\varepsilon/2} \sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{\xi}_n + \frac{u_{\varepsilon/2} \sigma_0}{\sqrt{n}} \right) \right) \\ &= \mathbf{P}_{\mu_0} (|u| \leq u_{\varepsilon/2}) = 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

u-próba

1. A minta alapján kiszámoljuk az u próbastatisztikát.
2. Rögzített $\varepsilon > 0$ szignifikanciaszinthez meghatározzuk $u_{\varepsilon/2}$ értéket.
3. Ha $|u| \leq u_{\varepsilon/2}$ akkor elfogadjuk H_0 -t, különben elvetjük.

Példa

Azt szeretnénk tesztelni, hogy az 1kg-os cukor tényleg 1kg-e?
Tfh: egy csomag tömege normális eloszlást követ μ várható értékkel (ezt nem ismerjük), és $\sigma_0 = 0,05$ ismert szórással.

$$H_0 : \mu = 1 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq 1. \quad (1)$$

25 elemű minta alapján $\bar{x}_{25} = 0,98$ adódik. A próbastatisztika értéke

$$u = \frac{\bar{x}_{25} - 1}{0,05} \sqrt{25} = -2.$$

Példa

$$u = \frac{\bar{x}_{25} - 1}{0,05} \sqrt{25} = -2.$$

Legyen $\varepsilon = 0,05$. Ekkor $u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96$. Mivel $|u| = 2 > 1,96$, ezért elvetjük a nullhipotézist, azaz úgy döntünk, hogy nem 1 a várható érték.

Példa

$$u = \frac{\bar{x}_{25} - 1}{0,05} \sqrt{25} = -2.$$

Legyen $\varepsilon = 0,05$. Ekkor $u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96$. Mivel $|u| = 2 > 1,96$, ezért elvetjük a nullhipotézist, azaz úgy döntünk, hogy nem 1 a várható érték.

Ugyanakkor, ha $\varepsilon = 0,01$. Ekkor $u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(0,995) = 2,57$. Mivel $|u| = 2 < 2,57$, ezért a nullhipotézist *ezen a szignifikanciaszinten* elfogadjuk.

Hibák

Elsőfajú hiba: H_0 fennáll, mégis elutasítjuk,

Másodfajú hiba: H_0 nem áll fenn, mégis elfogadjuk.

Elsőfajú hiba

Ha a valódi paraméter μ_0 , és $|u| \geq u_{\varepsilon/2}$, ennek valószínűsége $\mathbf{P}(|u| \geq u_{\varepsilon/2}) = \varepsilon$, azaz ez éppen az előre megadott ε szignifikanciaszint.

Másodfajú hiba

Ha a valódi paraméter $\mu \neq \mu_0$, azaz H_1 áll fönn, és $|u| \leq u_{\varepsilon/2}$. Ennek valószínűsége $\mathbf{P}_\mu(|u| \leq u_{\varepsilon/2})$ függ a valódi paraméter értékétől. A próba *erőfüggvénye*

$$\beta_n(\mu, \varepsilon) = 1 - \mathbf{P}_\mu(|u| \leq u_{\varepsilon/2}) = \mathbf{P}_\mu(|u| \geq u_{\varepsilon/2}).$$

Legyen $\Delta_n = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma_0} \sqrt{n}$. Ha H_1 áll fenn, és a várható érték valódi értéke μ , akkor $\sqrt{n}(\bar{\xi}_n - \mu)/\sigma_0$ változó lesz standard normális, ezért

$$\begin{aligned}\beta_n(\mu, \varepsilon) &= \mathbf{P}_\mu(|u| \geq u_{\varepsilon/2}) \\ &= \mathbf{P}_\mu \left(\left| \frac{\bar{\xi}_n - \mu}{\sigma_0} \sqrt{n} + \Delta_n \right| \geq u_{\varepsilon/2} \right) \\ &= 1 - \Phi(u_{\varepsilon/2} - \Delta_n) + \Phi(-u_{\varepsilon/2} - \Delta_n) \\ &= 2 - [\Phi(u_{\varepsilon/2} - \Delta_n) + \Phi(u_{\varepsilon/2} + \Delta_n)] .\end{aligned}$$

Innen látjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n(\mu, \varepsilon) = 1, \quad \text{tetszőleges } \mu \neq \mu_0 \text{ esetén.}$$

Ez utóbbi állítás próba konzisztenciáját jelenti.

t-próba

A feladat ugyanaz, mint az u-próbánál, csak σ ismeretlen.
Legyen $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ *ismeretlen* σ , ismeretlen μ . Igaz-e hogy a várható érték μ_0 .

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

σ ismeretlen, becsüljük $\sqrt{V_n^*}$ korrigált empirikus szórással.
Különben minden ugyanaz. A tesztstatisztika

$$t = \frac{\bar{\xi}_n - \mu_0}{\sqrt{V_n^*}} \sqrt{n}$$

H_0 fennállása esetén Student-eloszlású $n - 1$ szabadsági fokkal.

t-próba. Ezek alapján a következőképpen járunk el:

1. A minta alapján kiszámoljuk az t próbastatisztikát.
2. Rögzített $\varepsilon > 0$ szignifikanciaszinthez meghatározzuk $t_{\varepsilon/2}$ értéket.
3. Ha $|t| \leq t_{\varepsilon/2}$ akkor elfogadjuk H_0 -t, különben elvetjük.