Valószínűségszámítás gyakorlat

2020. november 17.

1. Egy szabályos kockával N-szer dobunk, ahol $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Jelölje X_1 az egyesek, X_2 a kettesek számát. Adjuk meg az együttes eloszlást!

(X_1, X_2) együttes eloszlása

$N \sim \text{Poisson}(\lambda)$: lehetséges értékei: $0, 1, 2, \dots$

$$P(N=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

X_1 lehetséges értékei: $0, 1, \dots$ tetszőlegesen nagy lehet!!

X_2 lehetséges értékei: $0, 1, \dots$

(X_1, X_2) lehetséges értékei (k, l) : $k \geq 0$, $l \geq 0$.

$$P(X_1 = k,\ X_2 = l) = ?$$

Ha $N = n$: (azaz n-szer dobunk):

$$P(X_1 = k, X_2 = l \mid N = n) = \frac{1}{6^k} \cdot \frac{1}{6^l} \left(\frac{4}{6}\right)^{n-(k+l)} \cdot \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{l}$$

feltéve, hogy
n-szer dobok

Emlékeztető: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Spec.: $B = \{N = n\}$

$A = \{X_1 = k, X_2 = l\}$

determinisztikus

n-nel dobunk $P(X_1 = 3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} \binom{n}{3}$

$$P(X_1 = k,\ X_2 = l) = \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^l \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{n-(k+l)} \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{l}$$

$$P(X_1 = k,\ X_2 = l \mid N = n) = \frac{1}{6^k} \frac{1}{6^l} \left(\frac{4}{6}\right)^{n-(k+l)} \binom{n}{k} \binom{n-k}{l}$$

$$P(X_1 = k,\ X_2 = l) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 = k,\ X_2 = l \mid N = n) \cdot P(N = n) =$$

teljes val. tétel   teljes eseményrendszer: $\{N=0\}, \{N=1\}, \ldots$
(egymást kizárók, lefedik Ω-t)

$$= \sum_{n=k+l}^{\infty} \frac{1}{6^k} \cdot \frac{1}{6^l} \left(\frac{4}{6}\right)^{n-(k+l)} \cdot \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{l} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} =$$

persze, hiszen $P(X_1 = k, X_2 = l \mid N = n) = 0$ ha $n < k+l$.

$$= \sum_{n=k+l}^{\infty} \frac{1}{6^{k+l}} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{n-(k+l)} \cdot \frac{\cancel{n!}}{k!\cancel{(n-k)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k)!}}{l!(n-k-l)!} \cdot \frac{\lambda^n}{\cancel{n!}} \cdot e^{-\lambda}$$

$$= \frac{1}{k! \cdot l!} e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{6^{k+l}} \sum_{n=k+l}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-(k+l)} \frac{1}{(n-(k+l))!} \cdot \lambda^{n-(k+l)} \cdot \lambda^{k+l}$$

$$= \frac{1}{k!} \frac{1}{l!} \left(\frac{\lambda}{6}\right)^{k+l} \cdot e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \left(\lambda \cdot \frac{2}{3}\right)^m \frac{1}{m!}}_{= e^{\frac{2}{3}\lambda}}$$

$m = n-(k+l)$

$$\boxed{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = e^x} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{k!}\frac{1}{\ell!}\left(\frac{\lambda}{6}\right)^{k+\ell} \cdot \underbrace{e^{-\lambda}\, e^{\frac{2}{3}\lambda}}_{e^{-\frac{\lambda}{3}}} = \left(\frac{\lambda}{6}\right)^{k} \cdot \frac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{6}} \cdot \left(\frac{\lambda}{6}\right)^{\ell} \frac{1}{\ell!} e^{-\frac{\lambda}{6}}.$$

Tehát $P(X_1 = k, X_2 = \ell) = \underbrace{\left(\frac{\lambda}{6}\right)^{k} \cdot \frac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{6}}} \cdot \left(\frac{\lambda}{6}\right)^{\ell} \cdot \frac{1}{\ell!} e^{-\frac{\lambda}{6}}.$

$k \geq 0$, $\ell \geq 0$.

Peremeloszlások: $P(X_1 = k) = \sum_{\ell=0}^{\infty} P(X_1 = k, X_2 = \ell) = \left(\frac{\lambda}{6}\right)^{k} \frac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{6}} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{6}\right)^{\ell} \frac{1}{\ell!} e^{-\frac{\lambda}{6}}}_{=1}$

$$= \left(\frac{\lambda}{6}\right)^{k} \cdot \frac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{6}}.$$

Tehát $X_1 \sim \text{Poisson}\left(\frac{\lambda}{6}\right)$

úgy $X_2 \sim \text{Poisson}\left(\frac{\lambda}{6}\right)$.

Sőt azt láttuk, hogy

$$P(X_1 = k, X_2 = \ell) = \left(\frac{\lambda}{6}\right)^{k} \frac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{6}} \cdot \left(\frac{\lambda}{6}\right)^{\ell} \cdot \frac{1}{\ell!} e^{-\frac{\lambda}{6}}$$

$$= P(X_1 = k) \cdot P(X_2 = \ell)$$

tehát X_1 és X_2 függetlenek!

Azt mutattuk meg, hogy Poisson eloszlás ritkítása Poisson eloszlást eredményez

$$N \sim \text{Poisson}(\lambda), \quad I_1, I_2, \ldots \sim \text{Bernoulli}(p)$$

N és I-k függetlenek

akkor $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} I_i \sim \text{Poisson}(\lambda p)$

2. Két szabályos kockával játszunk. Jelölje X az első kockával dobott számot és Y a dobott számok nagyobbikát. Adjuk meg az együttes eloszlást és az összeg várható értékét, szórását!

(X,Y) lehetséges értékei: $(1,1)$, $\cancel{(2,1)}$ nem : (k,l) : $1 \leq k \leq l \leq 6$

X lehetséges értékei: $1, 2, \ldots, 6$

Y értékei: $1, 2, \ldots, 6$

$$P(X=1, Y=1) = P(\text{mindkettő 1-es}) = \frac{1}{36}$$

$$P(X=1, Y=2) = P(\text{első kocka 1, második kocka 2}) = \frac{1}{36}$$

$$P(X=2, Y=2) = P(\text{első kocka 2, második kocka } 1 \vee 2) = \frac{2}{36}$$

$$P(X=1, Y=3) = P(\text{első kocka 1, második 3}) = \frac{1}{36}$$

Y \ X	1	2	3	4	5	6	Σ
1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	$\frac{3}{36}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	0	0	0	$\frac{5}{36}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$1/36$	$\frac{4}{36}$	0	0	$\frac{7}{36}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$1/36$	$1/36$	$5/36$	0	$9/36$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$1/36$	$1/36$	$6/36$	$11/36$
Σ	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

Y peremeloszlása

X peremeloszlása

peremeloszlások:

$$P(X=k)=\frac{1}{6} \qquad k=1,2,\dots,6$$

$$P(Y=k)=\frac{2k-1}{36} \qquad k=1,2,\dots,6$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{6} P(X=k)\cdot k=\sum_{k=1}^{6}\frac{k}{6}=\frac{7}{2}$$

$$E(Y)=\sum_{k=1}^{6} P(Y=k)\cdot k=\sum_{k=1}^{6}\frac{2k-1}{36}\cdot k=\dots$$

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\dots$$

$$D^2(X+Y)=\underbrace{E\left((X+Y)^2\right)}_{\substack{=E(X^2)+E(Y^2)\\+2E(XY)}}-\underbrace{\left(E(X+Y)\right)^2}_{\text{kiszámoltam}}$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{6} P(X=k)\cdot k^2=\dots$$

$$E(Y^2)=\sum_{k=1}^{6} P(Y=k)\cdot k^2=\dots$$

$$E(XY)=\sum_{1\le k\le l\le 6} k\cdot l\cdot P(X=k,Y=l)=\dots$$

3. Anna 30-ik születésnapjára azt a 6 darabos pohárkészletet kapja nagymamájától, mely már 100 éve a család tulajdona. A poharak élettartamai egymástól függetlenek, exponenciális eloszlást követnek 50 év várható értékkel. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy 50 év múlva Anna sértetlenül adhatja tovább unokájának a családi ereklyét (azaz mind a hat poharat)!

exponenciális eloszlás

$X \sim Exp(\lambda)$ ha $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad D^2(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$X_1, X_2, \ldots, X_6$ a poharak élettartama

$X_i \sim Exp(\lambda)$ és $X_1, \ldots, X_6$ függetlenek

kihasználtuk az örökifjúsági tulajdonságot

$$P(\underbrace{X_1 \geq 50, \ldots, X_6 \geq 50}_{\text{mindegyik pohár túlél}}) \underset{\text{függetlenek!}}{=} P(X_1 \geq 50) \cdots P(X_6 \geq 50)$$

$$= \left(P(X_1 \geq 50)\right)^6 = \left(1 - P(X \leq 50)\right)^6 = \left(1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{50} \cdot 50}\right)\right)^6$$

$$= e^{-6}$$

$$E(X) = 50 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{50}}$$

4. Legyenek X és Y független exponenciális eloszlású véletlen változók λ és μ paraméterekkel. Határozzuk meg a minimumuk eloszlását! Mennyi a valószínűsége, hogy Y a kisebb?

$X \sim Exp(\lambda)$, $Y \sim Exp(\mu)$ függetlenek

$Z = \min(X, Y)$.

Z eloszlása: $P(Z \leqq z)$ $\quad z \geqq 0$

Z értékei: $[0, \infty)$

$$P(Z \leqq z) \underset{Z \text{ def}}{=} P(\min(X,Y) \leqq z) = P(\text{legalább az egyik} \leqq z)$$

$$= 1 - P(\min(X,Y) > z) = 1 - P(X > z, Y > z)$$

$$\underset{\text{függetlenség}}{=} 1 - P(X > z) \cdot P(Y > z) =$$

$$= 1 - e^{-\lambda z} \cdot e^{-\mu \cdot z} = 1 - e^{-(\lambda+\mu) \cdot z}.$$

Tehát $P(Z \leqq z) = 1 - e^{-(\lambda+\mu) \cdot z}$

azaz $Z \sim Exp(\lambda+\mu)$.

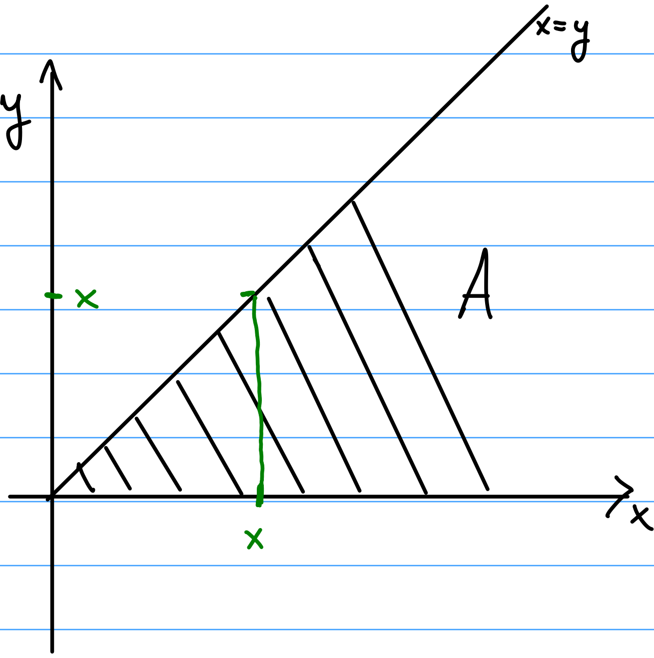
Azt láttuk be, hogy független exponenciálisok minimuma exponenciális. (fontos: Sztoch. modell folytonos idejű Markov láncok)

Az Y a kisebb:

$$P(Y \leq X) = P(\min(X,Y) = Y) =$$

$$= P((X,Y) \in A)$$

$$A = \{(x,y) : x \geq y\}$$



$$= \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

ahol $f(x,y)$ az együttes sűrűségfgv

$$f(x,y) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mu e^{-\mu y} \quad x,y \geq 0.$$

hiszen X, Y függetlenek

$$= \iint_A \lambda\mu \cdot e^{-\lambda x} \cdot e^{-\mu y}\,dx\,dy = \int_0^\infty \left(\int_0^x \lambda\mu e^{-\lambda x} e^{-\mu y}\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \cdot \Big(\underbrace{\int_0^x \mu e^{-\mu y}\,dy}_{1-e^{-\mu x}} \Big) dx = \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda x} (1 - e^{-\mu x})\,dx$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx}_{1} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu} \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-(\lambda+\mu)x}\,dx = 1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \int_0^\infty (\lambda+\mu) e^{-(\lambda+\mu)x}\,dx$$

$$= 1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot 1 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

//

5. Legyen $X \sim \mathrm{Geom}(p)$. Igazoljuk, hogy teljesül rá a diszkrét örökifjú tulajdonság, azaz

$$\mathbf{P}\{X > k + l | X > l\} = \mathbf{P}\{X > k\}.$$

Igazoljuk, hogy ez jellemzi is a geometriai eloszlást!

6. Diszkrét örökifjúból folytonosat. Legyen $X_n \sim \text{Geom}(\lambda/n)$. Határozzuk meg X_n/n határeloszlását, azaz adjuk meg a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} \le x\right)$$

határértéket minden $x \in \mathbb{R}$ esetén!

7. Egy étteremben kétféle menü közül lehet választani. A vendégek $5/6$ valószínűséggel A menüt, $1/6$ valószínűséggel B menüt választanak. Egy adott napon 500 vendég érkezik. A vendéglős 420 A és 100 B menüt készített elő. Feltételezve, hogy a vendégek egymástól függetlenül választanak, mi a valószínűsége, hogy mindenkinek jut olyan menü, amilyet kér?

8. Budapesten meg akarják állapítani a dohányosok p arányát. Ehhez kiválasztanak n egyént úgy, hogy minden választásnál mindenki ugyanakkora valószínűséggel kerül kiválasztásra, és csak ezek közt nézik meg a dohányosok k számát. Legalább mekkora legyen az n, hogy a kapott $p' = k/n$ arány legalább 0,95 valószínűséggel legfeljebb 0,005 hibával közelítse a valódi p arányt, akármi is $p \in (0, 1)$?