Valószínűségszámítás

6. feladatsor: véletlen vektorváltozók, várható érték, kovariancia

1. Egy vállalat egy hónapra eső profitja a havi teljes bevétel és a havi teljes kiadás különbségeként áll elő, ahol a bevétel és a kiadás is valószínűségi változó. A bevétel várható értéke 120 millió forint 30 millió forint szórással, míg a kiadás várható értéke 80 millió forint 20 millió forint szórással. Határozzuk meg az egy hónapra jutó profit várható értékét és szórását akkor, ha a bevétel és a kiadás független, illetve akkor, ha a közöttük lévő korrelációs együttható 0,8. A korreláció függvényében írjuk fel formulával és ábrázoljuk grafikonon a profit várható értékét és varianciáját.

2. Bence és Luca testvérek. Ebéd után mindketten véletlentől függő ideig alszanak. Bence esetében ez átlagosan 2 óra, a szórás 30 perc, míg Luca esetében 1,5 óra, 20 perc szórással. Határozzuk meg Bence és Luca együttes (Bence + Luca) alvásának várható értékét és szórását, ha az alvásmennyiségek egymástól függetlenek, illetve akkor, ha a közöttük lévő korrelációs együttható 0,5.

3. A Real Madrid 2018/2019-es idényben az egy mérkőzésen lőtt góljainak száma Poisson-eloszlást követ $\lambda = 3$ paraméterrel, míg a kapott gólok száma Poisson-eloszlást követ $\mu =$0,7 paraméterrel. Adjuk meg a Real Madrid egy mérkőzésén esett összes gól számának várható értékét és szórásnégyzetét abban az esetben ha

(a) a lőtt és kapott gólok száma függetlenek;

(b) a lőtt és kapott gólok számának korrelációs együtthatója 0,4.

4. Egy szabályos kockával n-szer dobunk. Jelölje X_1 az egyesek, X_2 a kettesek számát. Határozzuk meg az együttes eloszlásukat! Határozzuk meg X_1, X_2 kovarianciáját és korrelációját!

5. Egy szabályos kockával N-szer dobunk, ahol $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Jelölje X_1 az egyesek, X_2 a kettesek számát. Adjuk meg az együttes eloszlást! Határozzuk meg X_1, X_2 kovarianciáját és korrelációját!

6. Két szabályos kockával játszunk. Jelölje X az első kockával dobott számot és Y a dobott számok nagyobbikát. Adjuk meg az együttes eloszlást és az összeg várható értékét, szórását!

7. Legyen az (X, Y) véletlen változó. eloszlása egyenletes az egységkörben. Határozzuk meg az együttes eloszlásfüggvényt és a peremeloszlások sűrűségfüggvényeit!

8. Legyen az X és Y véletlen változók együttes sűrűségfüggvénye

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x+xy+y), & \text{ha}(x,y) \in (0,1)^2\,, \\ 0, & \text{különben}\,. \end{cases}$$

Határozzuk meg a peremeloszlásokat!

9. Láttuk, hogy abszolút folytonos véletlen vektorváltozó peremeloszlásai abszolút folytonosak. Igazoljuk, hogy ez nem megfordítható, azaz mutassunk X, Y abszolút folytonos véletlen változókat, melyek együttes eloszlása nem abszolút folytonos!

10. Lássuk be, hogy ha az (X, Y) véletlen vektorváltozó abszolút folytonos, akkor $\mathbf{P}(X = Y) = 0$. Az együttes sűrűségfüggvénnyel írjuk fel a $\mathbf{P}(X \leq Y)$ valószínűséget!

11. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független véletlen változók $F_1, F_2, \ldots, F_n$ eloszlásfüggvénnyel. Adjuk meg az $m_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ és az $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ véletlen változók eloszlását és együttes eloszlását!

12. Legyen $f(x,y) = c(x+y)$, $0 \leq x, y \leq 1$, egy (X, Y) vektorváltozó sűrűségfüggvénye. Mennyi c értéke? Adjuk meg a peremeloszlásokat, várható érték vektort, kovarianciamátrixot! Számoljuk ki Xe^Y várható értékét!

13. Legyen X és Y független Poisson eloszlású véletlen változó λ illetve μ paraméterrel. Határozzuk meg $X + Y$ és XY várható értékét és szórását, valamint a két változó kovarianciáját.

14. Legyen az X és Y változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = 6e^{-2x-3y} \quad (x, y > 0)\,,$$

0, különben. Határozzuk meg az együttes és marginális eloszlásfüggvényeket! Adjuk meg a kovarianciamátrixot!

15. Legyen X véletlen változó, melyre $\mathbf{E}(X^2) < \infty$. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \mathbf{E}[(X-x)^2]$ az $x = \mathbf{E}X$ pontban veszi föl a minimumát, ami éppen $\mathbf{D}^2(X)$.

16. Stefan Banach erős dohányos volt. Mindkét zsebében egy-egy doboz gyufát tartott, 100-100 szál gyufával. Minden alkalommal, amikor rágyújtott találomra benyúlt az egyik zsebébe, és az abban levő gyufásskatulyából kivett egy szál gyufát, majd a dobozt visszatette abba a zsebébe, amelyikből kivette. Egyszer csak azt vette észre, hogy a gyufásskatulya kiürült. Határozzuk meg a másik zsebében levő gyufák számának eloszlását!

17. Legyen az (X, Y) véletlen vektor sűrűsége $f(x,y) = 3/x^5$, ha $x \geq y \geq 0$, $x \geq 1$. Adjuk meg a kovarianciamátrixot!

18. Legyen $G = (V, E)$ egy egyszerű gráf, és $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a csúcsok egy sorrendje. Minden csúcsra feldobunk egy szabályos érmét, ha az fej akkor a csúcs az A halmazba, különben a B halmazba kerül. Határozzuk meg az A és B halmazok közt futó élek számának várható értékét!