Valószínűségszámítás

1. feladatsor: valószínűségi mező, események, kombinatorikus valószínűség

1. Egy szabályos érmét kétszer feldobunk. Adjuk meg a kísérlet egy matematikai modelljét! Adjuk meg azt az eseményt, hogy (i) dobunk fejet; (ii) két fejet dobunk!

Oldjuk meg a feladatot, ha az érme cinkelt, és a fejdobás valószínűsége p!

2. Adjuk meg a *lottóhúzást* leíró valószínűségi mezőt! Mennyi annak a valószínűsége, hogy pont 3 találatunk lesz? Mennyi a valószínűsége, hogy lesz találatunk?

3. Egy szabályos érmét tízszer feldobunk. Adjuk meg a kísérlet egy matematikai modelljét! Oldjuk meg a feladatot, ha az érme cinkelt, és a fejdobás valószínűsége p!

4. Három kockával dobva mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 4? Adjuk meg a kísérletet leíró valószínűségi mezőt, ha 3 különböző kockával dobunk, ill. ha 3 egyformával!

5. Három kockával dobva mennyi a valószínűsége, hogy 10-nél nagyobb a dobott számok összege? Adjuk meg a kísérletet leíró valószínűségi mezőt!

6. Fejezzük ki az A, B, C halmazokkal az alábbi eseményeket!

(a) Az A, B, C események közül pontosan $k \in \{1, 2, 3\}$ következik be.

(b) Az A, B, C események közül legalább k következik be.

(c) Az A, B, C események közül legfeljebb k következik be.

7. Igazoljuk az alábbi formulák helyességét!

(a) $A \circ B = (A \cup B) - A \cap B$;

(b) $A \cap (B - C) = A \cap B - A \cap C$;

(c) $A - (A - (B - C)) = A \cap B \cap C^c$;

(d) $A \cup B = A \circ B \circ (A \cap B)$.

8. Igazoljuk, hogy egy σ-algebra zárt a metszet-, és különbségképzésre; azaz ha $\mathcal{A}$ σ-algebra, és $A, B \in \mathcal{A}$, akkor $A \cap B \in \mathcal{A}$ és $A \backslash B \in \mathcal{A}$.

9. Legyen Ω tetszőleges alaphalmaz, és legyen

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : \text{ vagy } A, \text{ vagy } A^c \text{ véges}\}.$$

Igazoljuk, hogy $\mathcal{A}$ halmazrendszer algebra (csak véges unióra kell zárt legyen, nem megszámlálhatóra), és pontosan akkor σ-algebra, ha Ω véges!

10. Egy szabályos kockával 11-szer dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az egymást követő 1, 2, 3, 4, 5, 6 eredménysorozat nem fordul elő?

11. Hét törpe közül Hófehérke leültet ötöt egy kör alakú asztalhoz. Tegyük fel, hogy az összes lehetséges elrendezés egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy Morgó és Kuka nem kerül egymás mellé?

12. Tíz pár cipőből véletlenül kiválasztunk négy darabot. Mekkora a valószínűsége, hogy nem lesz egy pár sem?

13. Száz alma közül tíz férges. Véletlenül kiválasztva ötöt, mi a valószínűsége, hogy lesz közte férges?

14. Egy sakktáblán találomra elhelyezünk 8 bástyát. Mi a valószínűsége, hogy egyik sem üti a másikat?

15. A Bajnokok Ligájában 2017-ben három spanyol csapat jutott a 8 közé: az Atlético Madrid, a Barcelona és a Real Madrid. Sorsolással határozták meg a negyeddöntők párosítását (itt már nincs kiemelés, és azonos nemzet csapatai is összekerülhetnek). Mennyi volt a sorsolás előtt a valószínűsége annak, hogy a negyeddöntőben

(a) Barcelona – Real Madrid párharc lesz?

(b) lesz spanyol párharc?

16. Az A, B, C, D, E, F kereskedőcégek mindegyike az öt másik céggel kötött egy-egy üzletet az előző hónapban (bármelyik két cég között pontosan egy üzletkötés jött létre). Az ellenőrző hatóság véletlenszerűen kiválaszt a hat cég előző havi (egymás közötti) üzletkötései közül négyet, és azokat ellenőrzi. Mekkora a valószínűsége, hogy az A vagy a B cég üzletkötései közül is ellenőriznek legalább egyet?

17. Máté nagymamája meggylevest készít a vasárnapi ebédhez. Összesen 5 szem szegfűszeget tesz a levesbe. A levest 4 egyforma adagra osztják. Mennyi a valószínűsége, hogy Máté levesében nem lesz szegfűszeg? Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 3 szegfűszeg lesz a levesében?

18. Egy unatkozó gyakorlatvezető dolgozatiratás során arra lett figyelmes, hogy a csoportjában az összes lány egy sorban ül. A csoportban 10 hallgató van, közülük 3 lány. A teremben 4 sor van és minden sorban 4 hely, és feltesszük, hogy mindenki véletlenszerűen választ helyet, azaz minden leülési konfiguráció egyforma valószínűségű. Mennyi a kérdéses esemény valószínűsége?

19. Egy halastóban M aranyhal és K ezüsthal van. Egy horgász addig fogja ki egyesével a halakat, amíg már csak egyszínű hal marad a tóban (tehát vagy csupa aranyhal, vagy csupa ezüsthal). Mennyi a valószínűsége, hogy a Gyuri nevű ezüsthal megússza a horgászkalandot?

20. Legyen $\mathcal{A}$ a megszámlálható vagy ko-megszámlálható halmazok osztálya. Igazoljuk, hogy $\mathcal{A}$ σ-algebra!