A sztochasztika alapjai
MTN662

4. előadás: Függetlenség

Kevei Péter

2020/21 tavasz

Definíció

A B esemény bekövetkezése nem befolyásolja az A bekövetkezését, ha

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A),$$

ahonnan $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

Definíció

Az A és B események függetlenek, ha $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

Definíció

Az A és B események függetlenek, ha $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

- a függetlenség szimmetrikus
- a biztos és a lehetetlen eseménytől minden esemény független HF

Példa

Francia kártyapakliból húzunk egy lapot. D: dámát húzunk, K kőrt húzunk.
Ekkor $D \cap K$ az az esemény, hogy a kőr dámát húztuk ki, így $\mathbf{P}(D \cap K) = 1/52$. Ugyanakkor $\mathbf{P}(D) = 4/52 = 1/13$ és $\mathbf{P}(K) = 13/52 = 1/4$, azaz a két esemény független.

Példa

Földobunk n-szer egy szabályos érmét. Legyen A az az esemény, hogy legfeljebb egy fejet dobunk, B pedig az, hogy legalább egy fejet és egy írást dobunk.
Ekkor $\mathbf{P}(A) = (n+1)/2^n$, $\mathbf{P}(B) = 1 - 2/2^n$, és $\mathbf{P}(A \cap B) = n/2^n$. Azaz A és B pontosan akkor függetlenek, ha

$$\mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = \frac{n+1}{2^n} \frac{2^n - 2}{2^n} = \frac{n}{2^n} = \mathbf{P}(A \cap B)$$

teljesül. Innen kis számolgatással kapjuk, hogy A és B függetlenek, ha $n = 3$, különben pedig nem azok.

Három esemény függetlensége

Definíció

Az A, B, C események **függetlenek**, ha

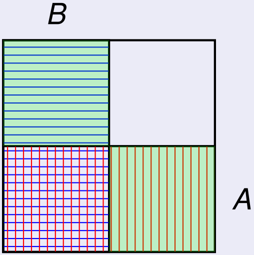
- $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$,
- $\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C)$,
- $\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$,
- és $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$.

Továbbá, az A, B, C események **páronként függetlenek**, ha bármely kettő független.

Példa

Válasszunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot a $[0,1]^2$ egységnégyzetben.

- A: a pont a $[0,1] \times [0,1/2]$ téglalapba esik (piros);
- B: a pont az $[0,1/2] \times [0,1]$ téglalapba esik (kék);
- C: a pont a $[0,1/2] \times [1/2,1] \cup [1/2,1] \times [0,1/2]$ halmazba esik (zöld);



Könnyen ellenőrizhető, hogy A, B, C páronként függetlenek, de *nem* függetlenek. HF

Több esemény függetlensége

Definíció

Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események **függetlenek**, ha bármely $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ és $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ esetén

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \ldots \mathbf{P}(A_{i_k}).$$

Végtelen sok esemény akkor független, ha közülük bármely véges sok független.

Állítás

Ha az $A_1, \ldots, A_n$ *események függetlenek, akkor tetszőleges* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *esetén az* $\{A_1, \ldots, A_k\}$ *eseményekből ill. az* $\{A_{k+1}, \ldots, A_n\}$ *eseményekből alkotott események függetlenek.*

Ezt nem bizonyítjuk. Az állítás szerint például ha A, B, C, D független események, akkor $A \cup B$ és $C \cap D$ is függetlenek. HF

Állítás

Független események közül ha néhányat kicserélünk a komplementerére, akkor is független eseményeket kapunk.

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ függetlenek. Nyilván elég megmutatni, hogy $A_1^c, A_2, \ldots, A_n$ is függetlenek. Hiszen ekkor egyesével kicserélhetünk akárhány eseményt. A definíciót elég az $1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ esetben ellenőrizni, hiszen ha A_1^c nincs a kiválasztott események közt, akkor a feltevés szerint teljesül a függetlenség. Ekkor viszont, előbb a mérték tulajdonsága, majd a függetlenség miatt

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_1^c \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) &= \mathbf{P}(A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \\
&= \mathbf{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbf{P}(A_{i_k}) - \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbf{P}(A_{i_k}) \\
&= [1 - \mathbf{P}(A_1)]\mathbf{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbf{P}(A_{i_k}) \\
&= \mathbf{P}(A_1^c)\mathbf{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbf{P}(A_{i_k}),
\end{aligned}$$

amit igazolni kellett.

$\varphi(n)$

Definíció (Euler-féle φ-függvény)

$\varphi(n)$ az n-hez relatív prímek száma az $\{1, \ldots, n\}$ számok között.

Tétel (Euler, 1763)

Legyenek $p_1, \ldots, p_k$ az n prímosztói (multiplicitás nélkül). Ekkor

$$\varphi(n) = n\left(1 - p_1^{-1}\right) \ldots \left(1 - p_k^{-1}\right).$$

Bizonyítás

- A $\varphi(n)/n$ hányados éppen annak a valószínűsége, hogy az $\{1, \ldots, n\}$ számok közül egyenletes eloszlás szerint egyet választva, n-hez relatív prímet kapunk.
- Legyenek $p_1, \ldots, p_k$ az n prímosztói (multiplicitás nélkül), és jelölje A_i azt az eseményt, hogy a választott szám p_i-vel osztható. Ekkor
$$\mathbf{P}(A_i) = \frac{\frac{n}{p_i}}{n} = \frac{1}{p_i},$$
és
$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_j}) = \frac{\frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_j}}}{n} = \frac{1}{p_{i_1}} \frac{1}{p_{i_2}} \cdots \frac{1}{p_{i_j}},$$
azaz az $A_1, \ldots, A_k$ események függetlenek

Bizonyítás

- n-hez relatív prímet választunk $\equiv$ a választott szám nem osztható n egyetlen prímosztójával sem $\equiv A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_k^c$.
- A függetlenség miatt

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(n)}{n} &= \mathbf{P}\left(A_1^c \cap \ldots \cap A_k^c\right) \\ &= \mathbf{P}(A_1^c) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_k^c) = \left(1 - p_1^{-1}\right) \ldots \left(1 - p_k^{-1}\right).\end{aligned}$$

Átszorozva kapjuk az állítást.

Craps játék

Egyesült Államokban népszerű, 1820 körül terjedt el New Orleansban.
A játékos két dobókockával dob. Ha az első dobásnál a dobott számok összege 7 vagy 11, akkor azonnal nyer, ha 2,3 vagy 12 akkor veszít. Különben folytatja a dobásokat, és akkor nyer, ha hamarabb dobja meg azt az összeget, amit elsőre dobott, mint a 7-et.
Mennyi a nyerés valószínűsége?

Craps

A: nyerünk, A_i: az első dobás eredménye i és nyerünk.

$$A = A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_{12}, \quad \text{és az unió diszjunkt.}$$

Világos, hogy $\mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_3) = \mathbf{P}(A_{12}) = 0$, továbbá

$$\mathbf{P}(A_7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad \text{és} \;\; \mathbf{P}(A_{11}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18},$$

Craps

Ha az első dobásnál az összeg $4, 5, 6, 8, 9$ vagy 10 akkor a dolog érdekesebb.
$A_{i,n}$: az első dobásnál az összeg i és pontosan az n-edik dobásnál nyerünk. Nyilván

$$A_i = \cup_{n=2}^{\infty} A_{i,n}, \quad \text{és az unió diszjunkt.}$$

Craps

$A_{4,n}$:

- az első dobásnál az összeg 4, $((1,3),(2,2),(3,1))$, és mivel nyertünk, az utolsó dobásnál is 4 az összeg.
- A közbülső $n-2$ dobás során nem dobtunk 4-et, és 7-et. Így $3+6$ esetet zártunk ki. Ezek szerint

$$\mathbf{P}(A_{4,n}) = \frac{3\cdot(36-9)^{n-2}\cdot 3}{36^n} = \frac{9}{36^2}\left(\frac{27}{36}\right)^{n-2}.$$

A geometria sort összegezve

$$\mathbf{P}(A_4) = \sum_{n=2}^{\infty}\mathbf{P}(A_{4,n}) = \frac{9}{36^2}\left(\frac{27}{36}\right)^{n-2} = \frac{1}{36}.$$

Craps

Hasonlóan HF

$$\mathbf{P}(A_{4,n}) = \mathbf{P}(A_{10,n}) = \frac{9}{36^2}\left(\frac{27}{36}\right)^{n-2}$$

$$\mathbf{P}(A_{5,n}) = \mathbf{P}(A_{9,n}) = \frac{16}{36^2}\left(\frac{26}{36}\right)^{n-2}$$

$$\mathbf{P}(A_{6,n}) = \mathbf{P}(A_{8,n}) = \frac{25}{36^2}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-2},$$

majd a megfelelő geometriai sorokat összegezve

$$\mathbf{P}(A_4) = \mathbf{P}(A_{10}) = \frac{1}{36},$$

$$\mathbf{P}(A_5) = \mathbf{P}(A_9) = \frac{2}{45},$$

$$\mathbf{P}(A_6) = \mathbf{P}(A_8) = \frac{25}{396}.$$

Craps

Végül azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=2}^{12} \mathbf{P}(A_i) = \frac{244}{495} \approx 0,493.$$