A sztochasztika alapjai

9. feladatsor: kovariancia, nevezetes eloszlások

1. A megtakarított pénzünket értékpapírba fektetjük, 20 darabot vásárolunk az A vállalat és 10 darabot a B vállalat részvényeiből. Egy év múlva a két vállalat részvényei várható értékben 700 illetve 1500 dollárt fognak majd érni, az árfolyamok szórása pedig 20 illetve 80 dollár.

(a) Tegyük fel, hogy a részvények árfolyama független egymástól. Várhatóan menynyit fog majd érni a portfóliónk egy év múlva? Mennyi a portfólió értékének a szórása?

(b) Tegyük fel, hogy a részvények árfolyama nem független egymástól. Az árfolyamok közötti korrelációs együttható függvényében írjuk fel formulával és ábrázoljuk a portfólió értékének várható értékét és varianciáját!

(c) Milyen kapcsolat van a korrelációs együttható és a befektetés kockázata között? Ha én egy kockázatkerülő befektető vagyok, akkor pozitív vagy negatív korrelációjú értékpapírokból állítsak össze portfóliót?

20 A : X az A vállalat részvényeinek az értéke 1 év múlva

10 B : Y B —||—

$\Rightarrow$ Portfólió érték egy év múlva: $20\cdot X + 10\cdot Y = Z$

$E(X) = 700 \quad D(X) = 20$

$E(Y) = 1500 \quad D(Y) = 80$

a) X és Y független

Kell: $E(Z) = ? \quad D(Z) = ?$

$$E(Z) = E(20X + 10Y) = E(20\cdot X) + E(10\cdot Y)$$

$$= 20\cdot 700 + 10\cdot 1500 = 29\,000.$$

$$D^2(Z) = D^2(20X + 10Y) =$$

$$D^2(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$$

$$E(Z^2) = E\left[(20X+10Y)^2\right] =$$

$$= E\left[400X^2 + 400XY + 100Y^2\right]$$

$$= 400\,\underbrace{E(X^2)}_{=D^2(X)+(E(X))^2} + 400\cdot\underbrace{E(XY)}_{\text{fgl.} \Rightarrow E(X)\cdot E(Y)} + 100\cdot\underbrace{E(Y^2)}_{=D^2(Y)+(E(Y))^2}$$

$$= \ldots$$

$$D^2(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \ldots$$

Másképp:

$$D^2(Z) = D^2(20X+10Y) \overset{\text{független!}}{=} D^2(20X) + D^2(10Y)$$

$$= 20^2\cdot D^2(X) + 10^2\, D^2(Y) =$$

$$= 400\cdot 20^2 + 100\cdot 80^2 = \ldots$$

b) $\varrho(X,Y) = \varrho$ $\qquad \underset{\text{korreláció}}{\varrho(X,Y)} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)}.$

$$E(Z) = E(20X+10Y) \underset{\text{mindig!!}}{=} 20E(X) + 10E(Y)$$

$$= 29000.$$

$$D^2(Z) = D^2(20X+10Y) =$$

$$= Cov(20X+10Y, 20X+10Y)$$

$$= D^2(20X) + D^2(10Y) + 2\cdot Cov(10X, 20Y)$$

$$= 400\cdot D^2(X) + 100\cdot D^2(Y) + 2\cdot 10\cdot 20\cdot Cov(X,Y)$$

$$= 400\cdot D^2(X) + 100\cdot D^2(Y) + 400\cdot \varrho\cdot D(X)D(Y).$$

$$D^2(Z) = 400\cdot D^2(X) + 100\cdot D^2(Y) + 400\cdot \underbrace{D(X)}_{20}\cdot \underbrace{D(Y)}_{80}\cdot \varrho$$

$$\varrho \in [-1, 1]$$

c) portfólió kockázata: minél nagyobb $D^2(Z)$ annál nagyobb a kockázat

$E(Z) = 29000$ nem függ ϱ-tól.

kockázatcsökkentő befektető $\rightarrow$ $\varrho \rightarrow -1$

kockázatvállaló befektető $\rightarrow$ $\varrho \rightarrow +1$

2. Húsvétra dobta piacra a Kinder Meglepetés új, matematikusfigurákat tartalmazó Kinder tojásait. Átlagosan minden 4-edik tojás rejt matematikusfigurát. Aladár 10 Kinder tojást kapott. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy Aladár matematikusfigurának örülhet! Adjuk meg Aladár matematikusfigurái számának eloszlását, várható értékét!

X : mat. figurák száma a 10 tojásban összesen

$\{\text{Aladár mat-figurának örülhet}\} = \{X \geq 1\}$

$$P(\text{Aladár} \ldots) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}.$$

$$X \sim \text{Binomiális}\Big(\underbrace{10}_{\text{ismétlések száma}}, \underbrace{\tfrac{1}{4}}_{\text{siker (mat.-figura van benne) valószge}}\Big)$$

$$E(X) = np = 10 \cdot \frac{1}{4} = 2{,}5.$$

$$D^2(X) = np(1-p) = 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{8}.$$

3. A Real Madrid 2018/2019-es idényben az egy mérkőzésen lőtt góljainak száma Poisson-eloszlást követ $\lambda = 3$ paraméterrel, míg a kapott gólok száma Poisson-eloszlást követ $\mu = 0{,}7$ paraméterrel. Adjuk meg a Real Madrid egy mérkőzésén esett összes gól számának várható értékét és szórásnégyzetét abban az esetben ha

(a) a lőtt és kapott gólok száma függetlenek;

(b) a lőtt és kapott gólok számának korrelációs együtthatója 0,4.

a) X: lőtt | gólok száma
Y: kapott |

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$
lehetséges értékei: $0, 1, 2, \ldots$

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$D^2(X) = \lambda$$

$$Z = X + Y$$

$$E(Z) \overset{\text{mindig!}}{=} E(X) + E(Y)$$

$$= 3 + 0{,}7 = 3{,}7.$$

$$D^2(Z) = D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$= D^2(X) + D^2(Y) + 2\, D(X) D(Y) \cdot \varrho(X,Y)$$

$$= 3 + 0{,}7 + 2 \cdot \sqrt{3 \cdot 0{,}7} \cdot \varrho$$

a) X, Y ftl. $\Rightarrow \varrho = 0$

b) $\varrho = 0{,}4. \Rightarrow \ldots$

4. Egy augusztusi éjszakán megfigyelhető csillaghullások száma Poisson–eloszlást követ. Annak a valószínűsége, hogy egy éjszaka egyetlen hullócsillagot sem látunk 0,1. Várhatóan hány hullócsillag figyelhető meg egy éjszaka?

5. Egy biztosítótársaság felmérte, hogy egy év során egy családi ház 0,0002 valószínűséggel gyullad ki. Mennyi a valószínűsége, hogy 2008-ban egy faluban, ahol 15000 ház van, négynél kevesebb tűz üt ki? (Közelítsünk Poisson–eloszlással!)