$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ val. mező

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ $\qquad \{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$.

**A sztochasztika alapjai**

*5. feladatsor: véletlen változók*

(valószínűségi)

**1.** Egy embernek $n$ egyforma kinézetű kulcsa van, melyek közül pontosan egy nyitja az ajtót. Emberünk véletlenül választva sorra próbálja a kulcsokat addig, amíg a jó kulcs elő nem kerül. Jelölje $X$ a szükséges próbálkozások számát. Adjuk meg $X$ eloszlását, ha

(a) a kipróbált rossz kulcsokat mindig félreteszi;

(b) a kipróbált rossz kulcsokat sose teszi félre.

a) $X$ lehetséges értékei: $1, 2, \ldots, n$.

$P(X = k) =$ $\qquad k = 1, 2, \ldots, n$.

$P(X=1) =$ $\qquad$ $n$ elem permutációi

$\Omega = 2^{\{1,2,\ldots,n\}}$ $\qquad$ $\Omega$ $n$ kulcs sorrendjei

? $\emptyset$ nyitva ~~az~~ ajtó $\qquad |\Omega| = n!$

$\{1\}$ $\quad \{1,2\}$

$P(X=1) = \dfrac{1}{n}$ ← jó kulcs / ← összes kulcs

$P(X=2) = \dfrac{\overset{\text{1. kulcs}}{(n-1)} \cdot \overset{\text{jó kulcs}}{1}}{n \cdot (n-1)} = \dfrac{1}{n}$

$P(X=k) = \dfrac{\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)} \cdot \ldots \cdot \cancel{(n-k+1)} \cdot 1}{n \cdot \cancel{(n-1)} \cdot \ldots \cdot \cancel{(n-k+1)}} = \dfrac{1}{n}$

$\hookrightarrow$ kedvező: $(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot 1$ $\qquad \underbrace{n-1}_{1.}\ \underbrace{n-2}_{2.}\ \ldots\ \underbrace{n-k+1}_{k-1.}\ \underbrace{1}_{k.}$

összes: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

diszkrét egyenletes eloszlás

$$P(X=k) = \frac{1}{n} \qquad k=1,2,\dots,n.$$

b) nem tesszük félre a kulcsokat.

X lehetséges értékei: 1, 2, 3, …

ugyanazt a kulcsot többször is kipróbálhatom.

$$P(X=k) = \frac{(n-1)^{k-1}}{n^k} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{n} \qquad \text{kedv.: } (n-1)^{k-1}\cdot 1$$

$$\begin{array}{ccccc} (n-1) & (n-1) & \dots & (n-1) & 1 \\ 1. & 2. & \dots & (k-1). & k. \end{array} \qquad \text{összes: } n^k$$

$$P(X=k) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{n}$$

$$X \sim \text{Geometriai}\left(\frac{1}{n}\right).$$

90-ből 5

**2.** Ötöslottón egy szelvénnyel játszva határozzuk meg a találataink számának eloszlását!

$X$ : találataink száma

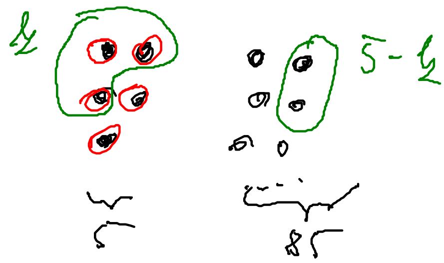
lehetséges értékek: $0, 1, \ldots, 5$.

$$P(X=k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}} \qquad k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$$

k találat

kedvező: $\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}$

összes: $\binom{90}{5}$



**3.** Határozzuk meg az ötöslottón kihúzott legkisebb szám eloszlását!

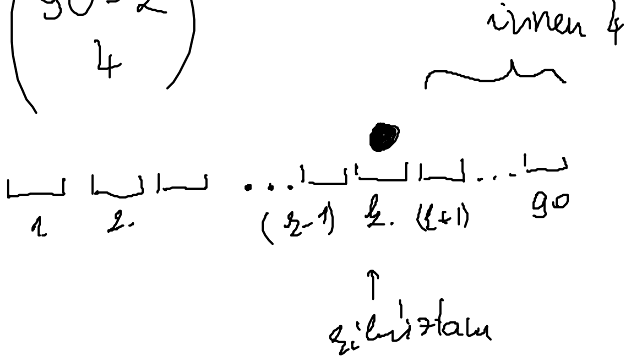
$X$ : legkisebb kihúzott szám

$X$ lehetséges értékei: $1, 2, \ldots, 86$

$$P(X=k) = \frac{\binom{90-k}{4}}{\binom{90}{5}} \qquad k \in \{1, 2, \ldots, 86\}$$

← összes

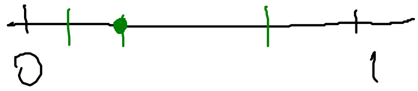
kedvező: $\binom{90-k}{4}$



**4.** Száz alma közül tíz férges. Véletlenül kiválasztunk ötöt! Adjuk meg a férges almák számának eloszlását!

**5.** A $(0,1)$ intervallumon találomra kijelölünk három pontot. Határozzuk meg a középső nullától vett távolságának eloszlás- és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását! Mekkora a valószínűsége, hogy a középső pont a $(1/4, 1/3)$ intervallumba esik?

X: középső




X lehetséges értékei: $(0,1)$.

$$F(x) = P(X \le x) = P(\{\omega : X(\omega) \le x\}), \quad x \in \mathbb{R}$$

eloszlásfüggvény $\quad F: \mathbb{R} \to [0,1]$

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ ? & x \in [0,1] \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

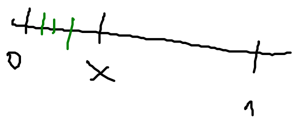
$x \in [0,1]$:

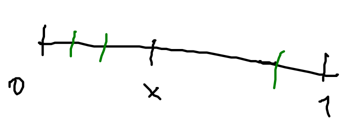
$P(X \le x)$


Ha egyetlen számot választunk akkor az $x$ valséggel esik a $[0,x]$-be.

3 számot választunk, középső a $(0,x]$-be esik:

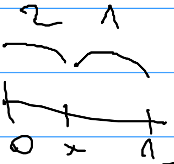
$$\{X \le x\} = \{\text{legalább 2 pont a } [0,x]\text{-be esik}\}$$



$P(X \leq x) = P(\text{legalább 2 pont a } [0,x]\text{-be esik})$

$= P(\text{pontosan 2 esik } [0,x]\text{-be}) + P(\text{pontosan 3 esik } [0,x]\text{-be})$

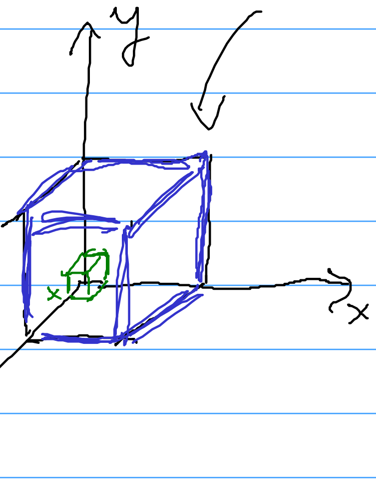


$= \binom{3}{2} x^2 (1-x) + x^3$

2 oda, 1 nem oda, mindhárom oda

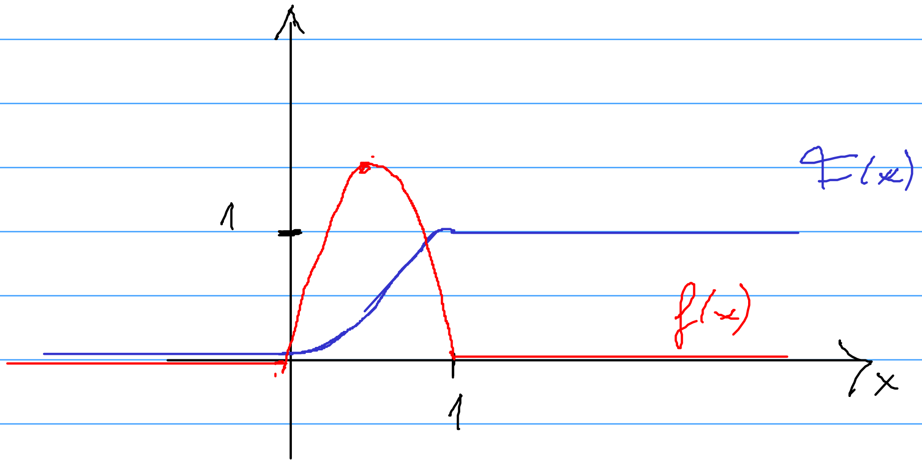
$= 3x^2 - 2x^3$

$\Omega = [0,1]^3$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 3x^2 - 2x^3 & x \in [0,1] \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x<0 \text{ vagy } x>1 \\ 6x - 6x^2 & \text{ha } x \in (0,1) \end{cases}$$




$$P\left(X \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)\right) = F\left(\frac{1}{3}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) = \dots$$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^{1/3} f(y)\,dy.$$

Általában: $P(X \in A) = \int_A f(y)\,dy.$

**6.** Egy permetező szakaszoló szelep napokban mért élettartamának sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3000}{x^4}, & \text{ha } x \geq 10, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Mennyi a valószínűsége, hogy a permetező szakaszoló szelep 20 napot túlél? Határozzuk meg a szelep élettartamának eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását!

**7.** Egy csomag francia kártyát megkevertünk, majd egyesével kihúzzuk a lapokat. Adjuk meg a második ász helyének eloszlását?

**8.** Adjunk példát olyan $F$ eloszlásfüggvényre, mely tiszta ugrófüggvény, és bármely $a < b$ esetén $F(b) - F(a) > 0$!