A sztochasztika alapjai

5. feladatsor: Függetlenség

1. Legyen A önmagától független esemény. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}(A) = 0$ vagy 1!

Def: A és B független $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

A fgtl önmagától $\Leftrightarrow$ $P(A \cap A) = P(A)P(A) = P(A)^2$

$\overset{\parallel}{P(A)}$

$\Rightarrow$ $P(A) = 0$ v. $P(A) = 1$.

2. Legalább hány lottószelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy egy sorsolásnál a telitalálat valószínűsége legalább 1/2 legyen? Legalább hány hétig kell játszani egyetlen szelvénnyel, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer volt telitalálatunk legalább 1/2 legyen?

90 szám $\to$ 5

1) Hány szelvényt kell kitölteni, hogy $\frac{1}{2}$-nél nagyobb legyen a telital. valsége?

k szelvényt töltünk ki

összes $\binom{90}{5}$

$$P(\text{telital}) = \frac{k}{\binom{90}{5}} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow k \geq \frac{\binom{90}{5}}{2}$$

2) Egyetlen szelvénnyel hány hétig kell játszani?

k hétig játszunk

Mennyi a valsége, hogy ≥ 1 telital. lesz?

összes: $\binom{90}{5}^k$

2

kedvezőtlen: $\left(\binom{90}{5} - 1\right)^k$

sorsolás 5 szám

$$P(\text{legalább 1 telitalálat}) = 1 - \frac{\left(\binom{90}{5} - 1\right)^k}{\binom{90}{5}^k} =$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}\right)^k$$

$$\lim_{k \to \infty} \Bigg(\underbrace{1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}}_{0 < \quad < 1}\Bigg)^k = 0$$

Keressük azt a legkisebb k-t melyre

$$1 - \left(1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}\right)^k > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} > \left(1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}\right)^k$$

$$\ln \frac{1}{2} > \ln\left(1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}\right)^k = k \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}\right)$$

$$\boxed{k > \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln\left(1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}\right)}} \approx \frac{\ln 2}{\frac{1}{\binom{90}{5}}} = \binom{90}{5} \cdot \ln 2 .$$

$$\binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot \ldots \cdot 86}{5!} =$$

$$= 43\,949\,268$$

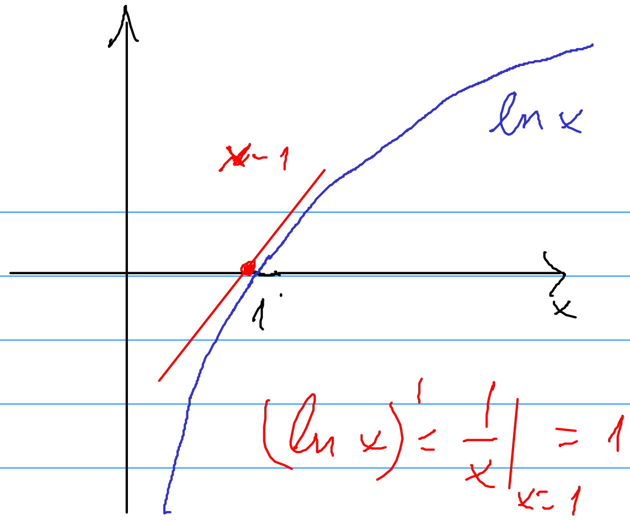
$$\approx 44 \cdot 10^6$$

$$\ln\left(1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}\right) \approx -\frac{1}{\binom{90}{5}}$$

$$\ln(1-x) \sim 1-x-1 = -x$$

$$x \sim 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = 1$$



$$\ln(1+x) \sim +x \qquad x \to 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$\ln(1+x) = x + \qquad x \to 0$$

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(\xi)}{2!} x^2$$ Taylor-sorfejtés

ξ a 0 és az x közt van.

3. Egy dobókockával tízszer dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első 5 dobás során nincs hatos, B pedig azt, hogy tíz dobás közt nincs egyes. Mekkora az A és a B események valószínűsége? Függetlenek-e A és B?

4. Legyenek $x \in [0,1]$ és $m, n \in \mathbb{N}$. Bizonyítsuk be (lehetőleg valószínűségi gondolatmenettel), hogy

$$(1-x^n)^m + (1-(1-x)^m)^n \geq 1.$$

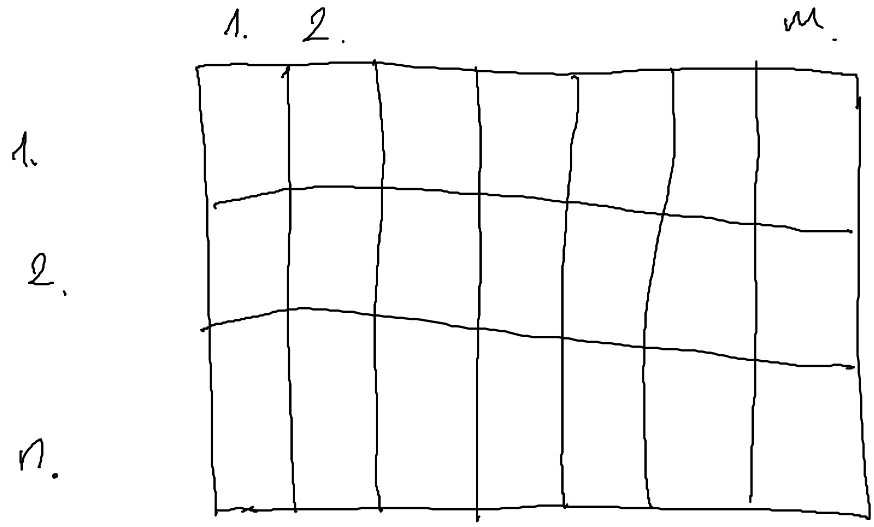
$$(1-p^n)^m + (1-(1-p)^m)^n \geq 1 \qquad p \in [0,1]$$

valószínűség!!

p^n n-szer ismétlés

$(\ )^m$: m-szer ismétlés

n·m-szer ismétlés



n sor

m oszlop

$P(1\text{-es}) = p$

$P(0) = 1-p$

kitöltöm a táblázatot, függetlenül

$p^n = P(\text{az első oszlop csupa 1-es})$

$1-p^n = P(\text{az első oszlop nem csupa 1-es})$

$$(1-p^n)^m = P(\text{az 1. oszlopban nem csupa 1-es, és 2. oszlop nem csupa 1-es}, \ldots, \text{és az } m\text{. oszlop nem csupa 1-es})$$

$$= P(\text{nincs csupa 1-es oszlop}).$$

$$(1-p^n)^m = P(\text{nincs csupa 1-es oszlop})$$

$$(1-p)^m = P(\text{az első sor csupa } 0)$$

$$1-(1-p)^m = P(\text{az első sor nem csupa } 0)$$

$$\left(1-(1-p)^m\right)^n = P(\text{nincs csupa } 0 \text{ sor})$$

$$(1-p^n)^m + \left(1-(1-p)^m\right)^n = P(\overbrace{\text{nincs csupa 1-es oszlop}}^{A}) + P(\underbrace{\text{nincs csupa 0 sor}}_{B})$$

$$\geq P(A \cup B) = 1.$$

$$A \cup B = \Omega$$

$$A^c \cap B^c = \emptyset$$

5. Veszünk egy elég nagy urnát, és éjfél előtt fél perccel 1-től 10-ig számozott golyókat rakunk bele, majd rögtön kiveszünk egyet. Éjfél előtt $1/4$ perccel az urnába 11-től 20-ig számozott golyókat teszünk, majd rögtön kiveszünk egyet. Ezt így folytatjuk éjfélig. Hány golyó lesz az urnában pontban éjfélkor, ha

(a) az i-edik lépésben az i-edik golyót vesszük ki?

(b) az i-edik lépésben a $10 \cdot i$-edik golyót vesszük ki?

(c) véletlenül vesszük ki a golyót?