A sztochasztika alapjai

4. feladatsor: Feltételes valószínűség, függetlenség

1. Az 52 lapos francia kártyából kiosztanak 13 lapot. Legyen A az az esemény, hogy pontosan 2 ászt kaptunk. Határozzuk meg a $\mathbf{P}(A|B_i)$ feltételes valószínűségeket, ha

(a) B_1 azt jelenti, hogy van legalább egy ászunk;

(b) B_2 azt jelenti, hogy a kőr ász nálunk van;

(c) B_3 azt jelenti, hogy a kiosztott lapok közül az első ász;

(d) B_4 azt jelenti, hogy a kiosztott lapok közül az első a kőr ász.

52 lap

4 szín: kőr, káró

13 figura: 2-10, J, D, K, Á

a) A: pont 2 ász

B_1: ≥ 1 ász

$$P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$$

hányból kell!

nem ászok közül 2

$$P(A \cap B_1) = P(A) = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{11}}{\binom{52}{13}}$$

← összes

$$P(B_1) = 1 - P(B_1^c) = 1 - \frac{\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}}.$$

b) B_2: kőr ász nálunk van

$$P(A|B_2) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(B_2)}$$

$$P(B_2) = \frac{\binom{51}{12}}{\binom{52}{13}} \begin{matrix} \leftarrow \text{kedvező} \\ \\ \leftarrow \text{összes} \end{matrix} = \frac{\frac{\cancel{51!}}{\cancel{12!}\cdot\cancel{39!}}}{\frac{52!}{13!\cdot\cancel{39!}}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

$A \cap B_2$ = kőr-ász és még pontosan 1 ász

$$P(A \cap B_2) = \frac{\binom{3}{1}\binom{48}{11}}{\binom{52}{13}}$$

$$P(A \mid B_2) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(B_2)} = \dots$$

c) B_3: a kiosztott lapok közül az első ász

$$P(A \mid B_3) = \frac{P(A \cap B_3)}{P(B_3)}$$

$$P(B_3) = \frac{4\binom{51}{12}\cdot 12!}{\binom{52}{13}\cdot 13!} = \frac{1}{13}$$

kedvező: $4\cdot\binom{51}{12}\cdot 12!$ (ászok)

összes: $\binom{52}{13}\cdot 13!$ — van sorrend

$$P(\underbrace{A \cap B_3}) = \frac{4\cdot 3\cdot\binom{48}{11}}{\binom{52}{13}\cdot 13} = \dots$$

pontosan 2 ász
& az első ász

összes: $\binom{52}{13}\cdot 13$

kedvező: $4\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{48}{11}$

2. mo.: összes: $\binom{52}{13}\cdot 13$ (első)

kedv.: $4\cdot\binom{51}{12}$

2. Egy cukrászdában 3 cukrász A, B és C süt süteményt, és a sütemények 2, 3 illetve 5%-át rontják el. A sütemények 50%-át A, 30 %-át B, 20%-át pedig C készíti. Mennyi a valószínűsége, hogy A sütötte a süteményt, feltéve, hogy az rossz?

A, B, C : ő sütötte

R : rossz a süti

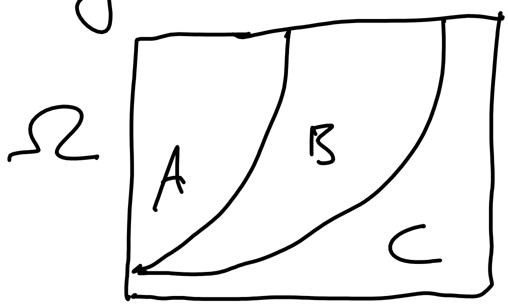
$$0{,}02 = P\cancel{(A\cap R)}\ P(R|A)$$
$$0{,}03 = P\cancel{(B\cap R)}\ P(R|B)$$
$$0{,}05 = P\cancel{(C\cap R)}\ P(R|C)$$
$$0{,}5 = P(A)$$
$$0{,}3 = P(B)$$
$$0{,}2 = P(C)$$

Kérdés: $P(A|R) = \dfrac{P(A\cap R)}{P(R)} = \dfrac{0{,}01}{0{,}029} = \dfrac{10}{29}$

$$P(R) = P(R|A)\cdot P(A) + P(R|B)\cdot P(B) + P(R|C)\cdot P(C)$$

A, B, C események teljes eseményrendszer

$$= 0{,}02\cdot 0{,}5 + 0{,}03\cdot 0{,}3 + 0{,}05\cdot 0{,}2$$
$$= 0{,}029$$



$$P(A\cap R) = P(A)\cdot P(R|A) = 0{,}5\cdot 0{,}02 = 0{,}01$$

A sütötte és rossz

3. A koronavírus teszt hatékonysága függ attól, hogy a fertőzött hány napja kapta el a betegséget. Tegyük fel, hogy a fertőzés minden esetben 12 napig tart (ez kb. igaz, ezért van 14 nap karantén). Ha a fertőzött $1-3$ napja kapta el a betegséget, akkor a teszt ezt nem tudja kimutatni, ha $4-5$ napja, akkor $0,5$ valószínűséggel mutatja ki, ha $6-12$ napja, akkor $0,75$ valószínűséggel (ez nagyjából stimmel). Feltehetjük, hogy egy fertőzött egyén az elmúlt 12 nap bármelyikén egyforma valószínűséggel fertőződött meg.

(a) Mekkora a valószínűsége, hogy egy fertőzött egyén tesztje negatív?

(b) Mivel ez így nem túl hatásos, a következő a szokásos eljárás. A vizsgálandó egyént letesztelik, majd karanténba küldik (ahol elvileg nem fertőződhet meg), és két nap múlva újra letesztelik. Csak akkor engedik ki a karanténból, ha mindkét tesztje negatív. Mekkora a valószínűsége, hogy egy fertőzött mindkét tesztje negatív, és még mindig fertőző? (Vegyük észre, hogy a betegünk a második teszt után meggyógyulhatott, ha elég régen fertőződött meg.)

Akit tesztelek az fertőzött.

a) N : a teszt negatív

~~F : fertőzött~~ ez lenne a kísérletünk

$\cancel{P(N|F)}$ $P(N)$

B_1 : 1-3 napja fertőzött $\quad P(B_1)=\frac{3}{12}$

B_2 : 4-5 $\quad$ –ll– $\quad P(B_2)=\frac{2}{12}$

B_3 : 6-12 $\quad P(B_3)=\frac{7}{12}$

B_1, B_2, B_3 teljes eseményrendszer.

$$P(N)=P(B_1\cap N)+P(B_2\cap N)+P(B_3\cap N)$$

$$=P(B_1)\cdot P(N|B_1)+P(B_2)\cdot P(N|B_2)+P(B_3)\cdot P(N|B_3)$$

$$=\frac{3}{12}\cdot \underset{\uparrow}{1}+\frac{2}{12}\cdot 0{,}5+\frac{7}{12}\cdot 0{,}25$$

tuti negatív = nem tudja kimutatni

$= 0{,}18$ Nem dől jó.

b) 2 teszt NN: két egym. teszt és még feltöz

A_i: első teszt előtt i nappal betegedett meg
$i = 1, \dots, 12$.

$P(NN \mid A_1) = 1$

első tesztnél 1 nap 0
második tesztnél 3 nap 0

$P(NN \mid A_2) = 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$

1. teszt. 2
2. teszt 4

$P(NN \mid A_5) = 0{,}5 \cdot 0{,}25 = 0{,}125$

1. teszt: 5
2. teszt: 7

$P(NN \mid A_i) = 0{,}25 \cdot 0{,}25 = 0{,}0625$

$10 \geq i \geq 6$

$P(NN \mid A_{11}) = 0 = P(NN \mid A_{12})$

$$P(NN) = \sum_{i=1}^{12} P(NN \mid A_i) \cdot P(A_i) = \sum_{i=1}^{12} P(NN \mid A_i) \cdot \frac{1}{12}$$

$= 0{,}21$

$h>0$

4. Tegyük fel, hogy egy alkatrész meghibásodásának valószínűsége a $(t, t+h)$ intervallumban, feltéve, hogy t ideig működött, $\lambda h + o(h)$. Határozzuk meg annak a $p(t)$ valószínűségét, hogy az alkatrész legalább t ideig működött!

$(n\to\infty)$ $f(n) = o(n)$ ha $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = 0$.

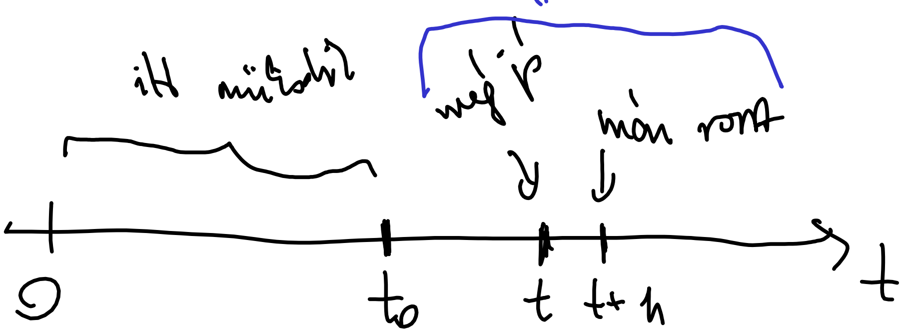
<u>Def</u>: $f(h) = o(h)$ h kicsi $\iff$ $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$.

$t \geq 0$ $\quad p(t) = P(\text{legalább } t\text{-ig működik}) = P(A_t)$

$A_t =$ legalább t-ig működik

$$P(\text{elromlik } (t,t+h)\text{-ban} \mid A_t) = \lambda h + o(h)$$

$$\underbrace{\text{elromlik } (t,t+h)\text{-ban}}_{} = \underbrace{A^c_{t+h}}_{\text{nem működik } (t+h)\text{-ban}} \cap A_t$$



$$P(A_t \cap A^c_{t+h} \mid A_t) = \lambda h + o(h)$$

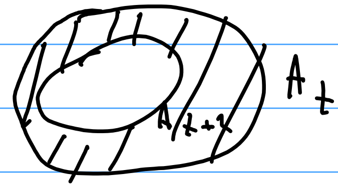
″def

$$\frac{P(A_t \cap A_{t+h}^c \cap A_t)}{P(A_t)} = \frac{P(A_t \cap A_{t+h}^c)}{P(A_t)} = \frac{P(A_t) - P(A_{t+h})}{P(A_t)}$$

$\underline{h>0}$

$$P(A_t \cap A_{t+h}^c) = P(A_t \setminus A_{t+h}) = P(A_t) - P(A_{t+h})$$

$$A_t \supset A_{t+h}$$



$$p(t) - p(t+h) = p(t) \cdot \lambda \cdot h + p(t) \cdot o(h)$$

t fix

$$\frac{p(t) - p(t+h)}{h} = \lambda p(t) + p(t) \cdot \frac{o(h)}{h}$$

$\underline{h \downarrow 0}$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$-p'(t) = \lambda p(t) + 0 = \lambda p(t)$$

differenciál-egyenlet $\Big[\ p'(t) = -\lambda p(t)$

$$\left.\begin{array}{l} p(t) = e^{-\lambda t} \cdot \text{konst} \\ p(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{konst} = 1$$

$$\boxed{\varphi(t) = e^{-\lambda t}}$$

$$\varphi'(t) = -\lambda \varphi(t)$$

$$\left(\varphi(t) e^{\lambda t}\right)' = \varphi'(t) e^{\lambda t} + \varphi(t) \cdot \lambda e^{\lambda t}$$

fehl

$$= -\lambda \varphi(t) e^{\lambda t} + \varphi(t) \cdot \lambda e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(t) \cdot e^{\lambda t} = \text{const.}$$

5. Legyen A önmagától független esemény. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}(A) = 0$ vagy 1!

6. Legalább hány lottószelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy egy sorsolásnál a telitalálat valószínűsége legalább $1/2$ legyen? Legalább hány hétig kell játszani egyetlen szelvénnyel, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer volt telitalálatunk legalább $1/2$ legyen?

7. Egy dobókockával tízszer dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első 5 dobás során nincs hatos, B pedig azt, hogy tíz dobás közt nincs egyes. Mekkora az A és a B események valószínűsége? Függetlenek-e A és B?

8. Legyenek $x \in [0,1]$ és $m, n \in \mathbb{N}$. Bizonyítsuk be (lehetőleg valószínűségi gondolatmenettel), hogy

$$(1 - x^n)^m + (1 - (1 - x)^m)^n \geq 1.$$

9. Veszünk egy elég nagy urnát, és éjfél előtt fél perccel 1-től 10-ig számozott golyókat rakunk bele, majd rögtön kiveszünk egyet. Éjfél előtt $1/4$ perccel az urnába 11-től 20-ig számozott golyókat teszünk, majd rögtön kiveszünk egyet. Ezt így folytatjuk éjfélig. Hány golyó lesz az urnában pontban éjfélkor, ha

(a) az i-edik lépésben az i-edik golyót vesszük ki?

(b) az i-edik lépésben a $10 \cdot i$-edik golyót vesszük ki?

(c) véletlenül vesszük ki a golyót?