A sztochasztika alapjai

3. feladatsor: Geometriai valószínűség, feltételes valószínűség

1. A $[0,1]$ intervallumot felosztjuk két véletlenül rádobott ponttal három részre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

(a) mindhárom szakasz hossza nagyobb, mint $1/4$?

(b) mindhárom szakasz hossza kisebb mint $1/2$?

(c) a szakaszokból háromszög szerkeszthető?

(d) a szakaszokból hegyesszögű háromszög szerkeszthető? (nehezebb)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $n=2$

szép részhalmaz (Borel)

területe (hossz, térfogat) $\in (0,\infty)$

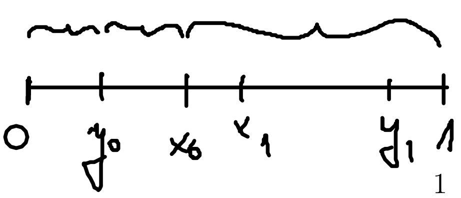
$\mathcal{A}$: Ω szép részhalmazai (Borel)

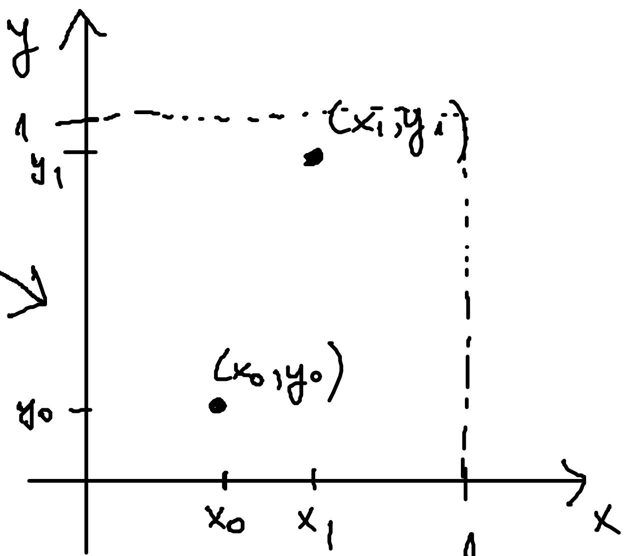
$P : \mathcal{A} \to [0,1]$: $P(A) = \dfrac{ter(A)}{ter(\Omega)}$ $\qquad \dfrac{kedvező}{összes}$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ geometriai val mező

— o —

$[0,1]$-en két pont

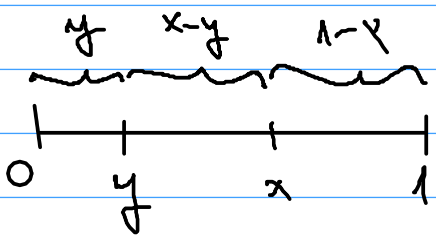




$\Omega = [0,1]^2$ $\quad \mathcal{A} = [0,1]^2$ szép részhalm.

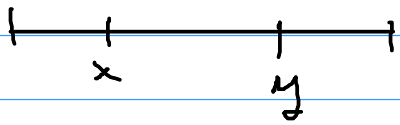
$P(A) = \dfrac{ter(A)}{ter(\Omega)} = ter(A)$.

a) Mindhárom szakasz hosszabb, mint $\frac{1}{4}$.



szakaszok hossza: $y, x-y, 1-x$ ha $x \geq y$

ha $x \leq y$: $x, y-x, 1-y$



I. eset: $x \geq y$: $y, x-y, 1-x$

felt.: $y \geq \frac{1}{4}$

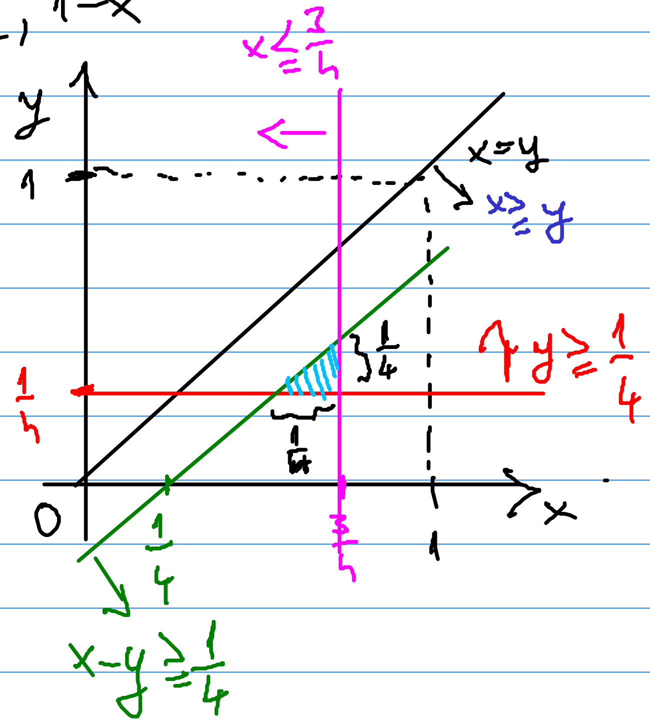
és

$x-y \geq \frac{1}{4}$

és

$1-x \geq \frac{1}{4}$

$x \leq \frac{3}{4}$



II. eset: $x<y$: szakaszok: $x, y-x, 1-y$

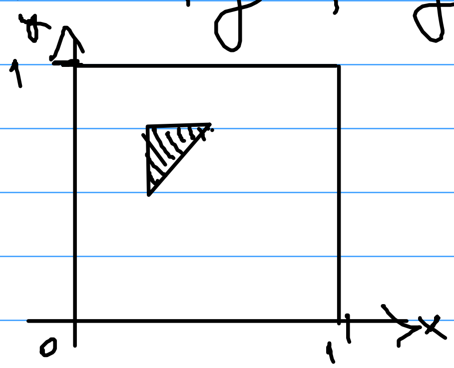
felt: $x \geq \frac{1}{4}$

és

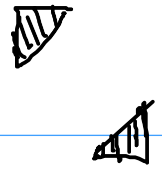
$y-x \geq \frac{1}{4}$ ...

és

$1-y \geq \frac{1}{4}$



kedvező rész:



területe: $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$.

$$P(A) = \frac{ter(A)}{ter(\Omega)} = \frac{\frac{1}{16}}{1} = \frac{1}{16}.$$

A: mindegyik darab $\geqq \frac{1}{4}$

c) a, b, c szakaszokból $\triangle$ szerkeszthető

$$\Longleftrightarrow \begin{aligned} &a+b>c \\ &b+c>a \\ &a+c>b \end{aligned}$$

2. András és Betti munkaideje egymástól függetlenül egy-egy du. 4 és 6 közötti egyenletes eloszlású időpontban ér véget. Munkaidejük végeztével mindketten elmennek egy, munkahelyüktől azonos távolságra levő kávézóba, ahol elfogyasztanak egy csésze kávét. András esetében ez 10 perc, Betti esetében 20. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak?

András végez: $x \in [4,6]$
Betti végez: $y \in [4,6]$

$\Omega = [4,6] \times [4,6]$

A részhalmaz

$P(A) = \frac{ter(A)}{ter(\Omega)} = \frac{ter(A)}{4}$.

Alternatív mego.
$4+x$ $\quad x, y \in [0,2]$
$4+y$

A: találkoznak

T: munkahelytől a kávézóig ér

I. eset: Betti végez előbb

$\boxed{y \leq x}$: Betti odaér: $y+T$, meddig: $y+T+\frac{1}{3}$ (20 perc)

András odaér: $x+T$

találkoznak: $x+T \leq y+T+\frac{1}{3}$

$\boxed{x \leq y+\frac{1}{3}}$

2

II. eset András végez előbb

$\boxed{x \leq y}$: András ad: $x+T$ meddig: $x+T+\frac{1}{6}$ (10 perc)

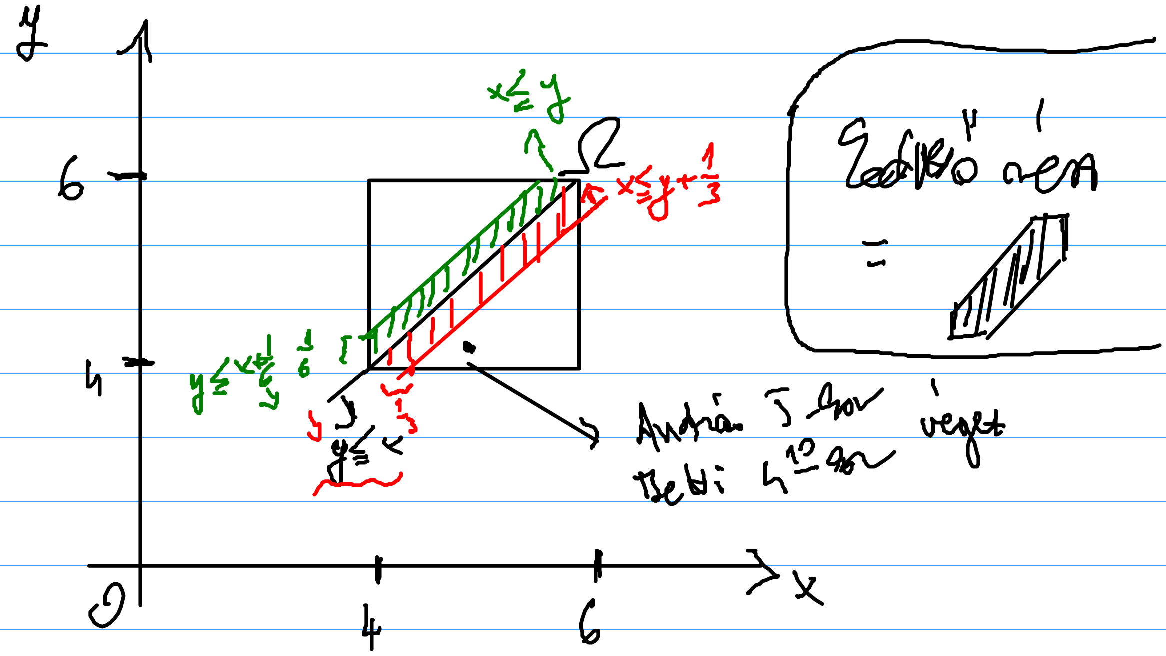
Betti érkezik: $y+T$

találkoznak: $y+T \leq x+T+\frac{1}{6}$

$$\boxed{y \leq x+\frac{1}{6}}.$$

Tehát találkoznak ha

$$\left(y \leq x \text{ és } x \leq y+\frac{1}{3}\right) \text{ vagy } \left(x \leq y \text{ és } y \leq x+\frac{1}{6}\right)$$



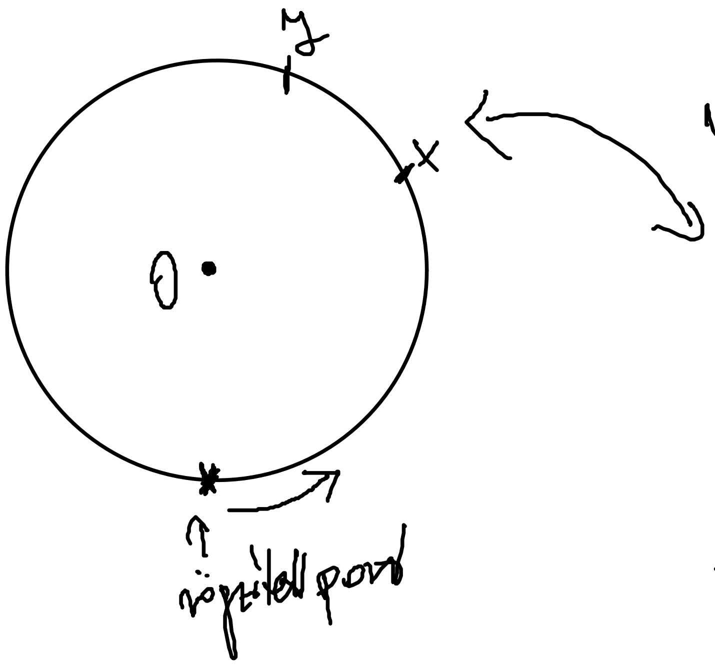
$$\text{ter}(\text{kedv}) = 4 - \text{ter}(\triangledown) - \text{ter}(\triangle)$$
$$= 4 - \frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{3}\right)^2$$

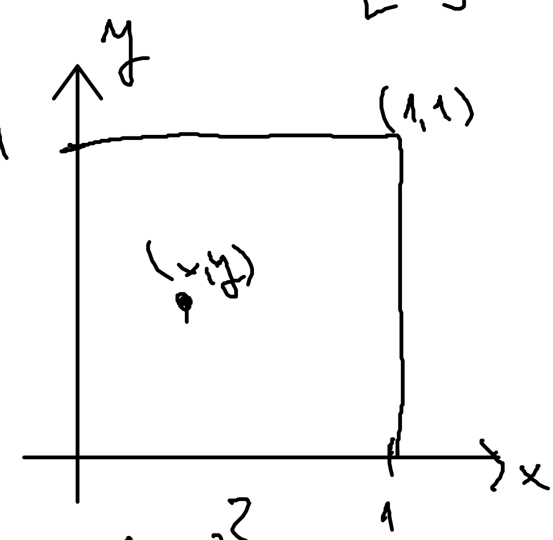
$$P(\text{találkozunk}) = \frac{\text{ter}(\text{kedv})}{\text{ter}(\text{összes})} = \frac{4 - \frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}{4}$$

körvonal

3. Tekintsünk egy egységnyi kerületű kört, és ennek egy rögzített pontját. Válasszunk további két pontot a körvonalon egymástól függetlenül egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy a három pont által meghatározott háromszög fedi a kör középpontját?

$\Omega = [0,1]^2$





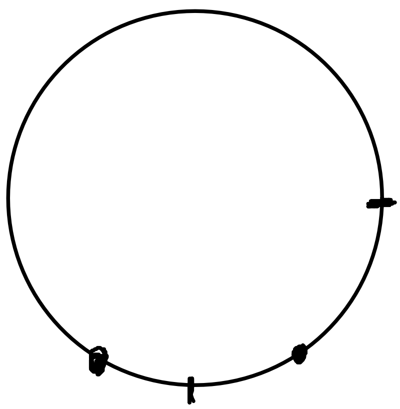
$\Omega = [0,1]^2$ P terület

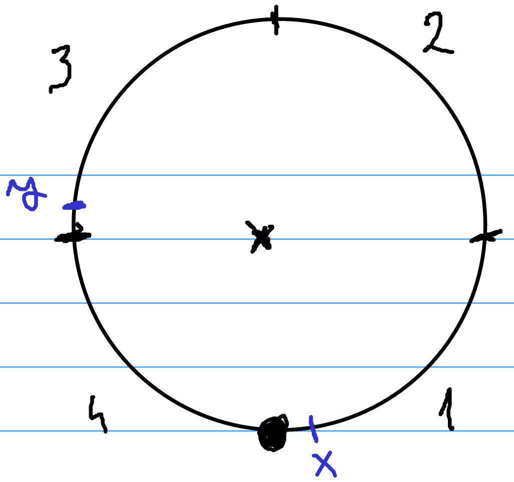
$A =$?

△ tartalmazza O-t ⟺ △ hegyesszögű.
(beleértve a derékszögűt)

△ tartalmazza O-t ha az egyik pont $> \frac{1}{2}$
és a másik pont $< \frac{1}{2}$

Nem egészen jó.

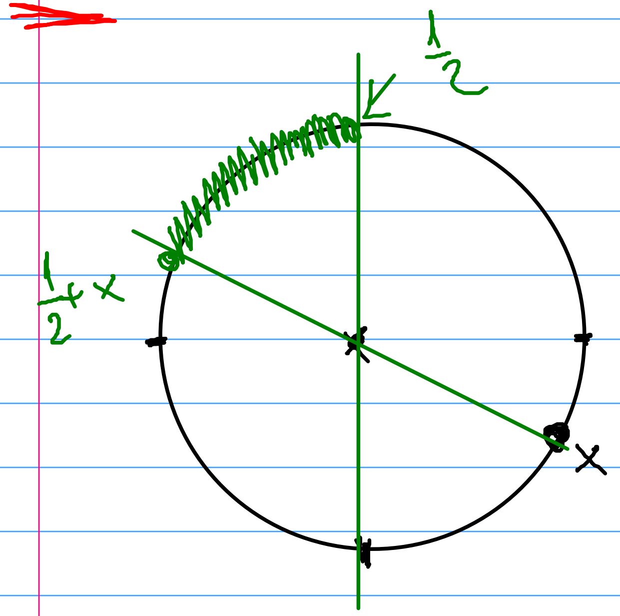




x az 1. íven és y 3.-on

vagy x a 2.-on és y 4.-en

Ez így nem jó.

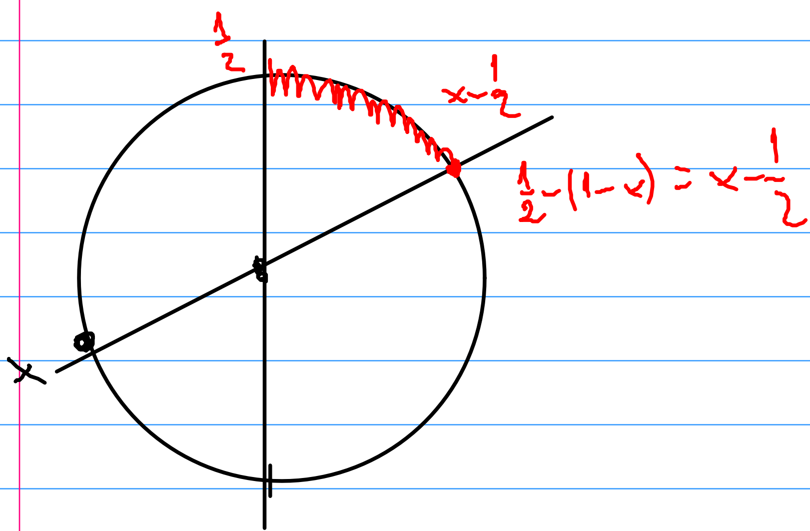


Hova kell essen y?

Ha $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

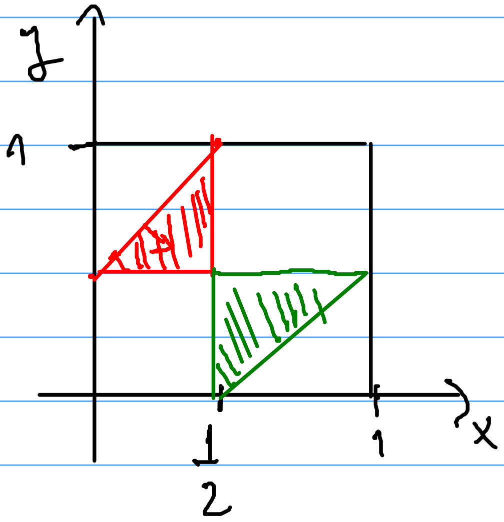
akkor $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} + x$

Vagy: $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ akkor $x - \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$



$$\left(0 \le x \le \frac{1}{2} \ \text{és} \ \frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2} + x\right) \ \text{vagy}$$

$$\left(\frac{1}{2} \le x \le 1 \ \text{és} \ x - \frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}\right)$$



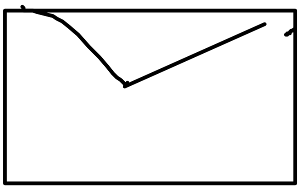
$$\text{ter(kedv)} = \frac{1}{4}$$

$$P(\dots) = \frac{1}{4}.$$

4. Egy kör kerületén válasszunk n pontot egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pontok konvex burka tartalmazza a kör középpontját? Mennyi ez a valószínűség, ha a pontokat a kör belsejében választjuk függetlenül, egyenletes eloszlás szerint?

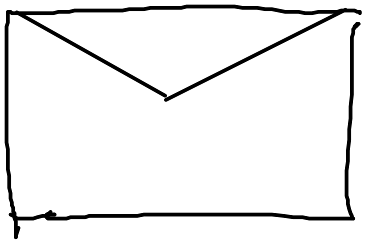
5. Aladár a pénzét három egyforma borítékban tartja. Az elsőben két ezerforintos, a másodikban egy ezer- és egy kétezerforintos, a harmadikban egy ezer és három kétezerforintos van. Aladár találomra kivesz egy borítékot, és onnan egy bankjegyet. Mennyi a valószínűsége, hogy ezerforintost húzott?

1.



2db. 1000

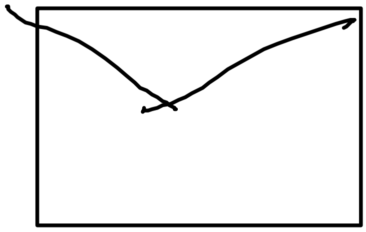
2.



1db 1000

1db 2000

3.



1db 1000

3db 2000

B = 1000-est húz

$$P(B) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \ldots$$

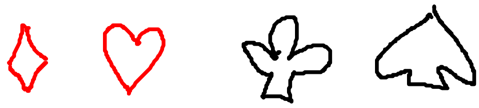
6. Az 52 lapos francia kártyából kiosztanak 13 lapot. Legyen A az az esemény, hogy pontosan 2 ászt kaptunk. Határozzuk meg a $\mathbf{P}(A|B_i)$ feltételes valószínűségeket, ha

(a) B_1 azt jelenti, hogy van legalább egy ászunk;

(b) B_2 azt jelenti, hogy a kőr ász nálunk van;

(c) B_3 azt jelenti, hogy a kiosztott lapok közül az első ász;

(d) B_4 azt jelenti, hogy a kiosztott lapok közül az első a kőr ász.

4 szín  13 figura

A: 2 ász

a) B_1: van legalább 1 ász

$$P(A|\underbrace{B_1}_{\text{felt.}}) \overset{\text{def}}{=} \frac{P(A\cap B_1)}{P(B_1)} = \dots$$

pontosan 4 ász

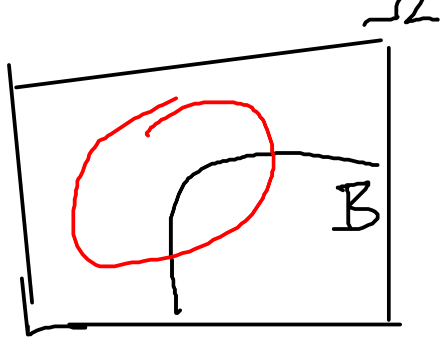
pontosan 3 ász

$$P(B_1) = \frac{\binom{4}{4}\cdot\binom{48}{9} + \binom{4}{3}\cdot\binom{48}{10} + \binom{4}{2}\binom{48}{11} + \binom{4}{1}\cdot\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}}$$

← összes

52 közül kapunk 13-at

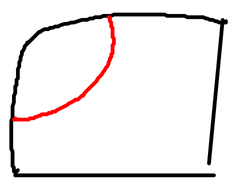
Ω



$$P(A\cap B_1) = P(A) = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{11}}{\binom{52}{13}} \begin{array}{l}\text{← kedv.}\\ \text{← összes}\end{array}$$

$A\cap B_1 = A$

$P(\cdot\,|B)$



7. Egy cukrászdában 3 cukrász A, B és C süt süteményt, és a sütemények 2, 3 illetve 5%-át rontják el. A sütemények 50%-át A, 30 %-át B, 20%-át pedig C készíti. Mennyi a valószínűsége, hogy A sütötte a süteményt, feltéve, hogy az rossz?

8. A koronavírus teszt hatékonysága függ attól, hogy a fertőzött hány napja kapta el a betegséget. Tegyük fel, hogy a fertőzés minden esetben 12 napig tart (ez kb. igaz, ezért van 14 nap karantén). Ha a fertőzött $1-3$ napja kapta el a betegséget, akkor a teszt ezt nem tudja kimutatni, ha $4-5$ napja, akkor $0,5$ valószínűséggel mutatja ki, ha $6-12$ napja, akkor $0,75$ valószínűséggel (ez nagyjából stimmel). Feltehetjük, hogy egy fertőzött egyén az elmúlt 12 nap bármelyikén egyforma valószínűséggel fertőződött meg.

(a) Mekkora a valószínűsége, hogy egy fertőzött egyén tesztje negatív?

(b) Mivel ez így nem túl hatásos, a következő a szokásos eljárás. A vizsgálandó egyént letesztelik, majd karanténba küldik (ahol elvileg nem fertőződhet meg), és két nap múlva újra letesztelik. Csak akkor engedik ki a karanténból, ha mindkét tesztje negatív. Mekkora a valószínűsége, hogy egy fertőzött mindkét tesztje negatív, és még mindig fertőző? (Vegyük észre, hogy a betegünk a második teszt után meggyógyulhatott, ha elég régen fertőződött meg.)