A sztochasztika alapjai

2. feladatsor: Szita formula, kombinatorikus és geometriai valószínűség, vegyes

1. Egy halastóban M aranyhal és K ezüsthal van. Egy horgász addig fogja ki egyesével a halakat, amíg már csak egyszínű hal marad a tóban (tehát vagy csupa aranyhal, vagy csupa ezüsthal). Mennyi a valószínűsége, hogy a Gyuri nevű ezüsthal megússza a horgászkalandot?

először az összes aranyhalat kifogja
akkor Gyuri megússza

M db arany $a_1, a_2, \dots, a_M$
K db ezüst $e_1, e_2, \dots, e_K \leftarrow e_K$: Gyuri

lehetséges kimenetel: $\underline{a_2}$ $\underline{a_7}$ $\underline{e_1}$ ... $\underline{\ \ }$

elsőnek kifogott hal

második

harmadik

egészen addig horgászik amíg kifogja vagy az összes aranyhalat vagy az összes ezüsthalat

lehet: $\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_M}$
(akkor csak aranyhalat fog) ← M halat fog

$\underbrace{e_1, \dots, e_K}$ csak ezüst ← K halat fog

$\underbrace{a_1, e_1, \dots, a_{M-1}, \dots, e_{K-1}, a_M}$ ← akkor M+K−1 halat fog ki

Probléma: nem ugyanolyan hosszú vektorok
⇒ NEM klasszikus

Lehetséges kimenetel: $M+K$ ember egy sorrendje

$$\Omega = \{ \{e_1,\dots,e_K, a_1,\dots,a_M\} \text{ elemek permutáció} \}$$

$\mathcal{A} = 2^\Omega$, $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$ $\dfrac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$ klasszikus

Gyuri megússza = ha Gyuri az összes a_i után van

e_K = Gyuri

$P(\text{Gyuri megússza}) = P($ $a_1,\dots,a_M, e_K$ permutációjában e_K az utolsó $) = \dfrac{1}{M+1}$

Csak az $a_1,\dots,a_M, e_K$ halak sorrendjét figyelem

$\underbrace{\sqcup \dots \sqcup}_{\text{atámi}}$ $\underset{M+1}{\boxed{\text{Gyuri}}}$

$$\frac{M!}{(M+1)!} \leftarrow \text{összes} \quad = \frac{1}{M+1}$$

$M=3$ $K=2$

$\rightarrow$ a_1 a_2 a_3	e_1 e_2	a_1 e_1 a_2 a_3 | e_2
$\rightarrow$ a_1 a_2 a_3	e_2 e_1	a_1 e_1

$\Rightarrow$

valahol $e_1, e_2, \dots, e_{K-1}$ halak

$\checkmark a_1 \checkmark a_2 \checkmark e_K \checkmark a_3 \checkmark$

$$P(\text{mindenki jót}) = \frac{4!\,3!\,2!}{9!}$$

2. Egy vendéglőben az egyik asztalnál 9 vendég ül. Négyen kólát, hárman sört rendeltek, ketten pedig ásványvizet rendeltek. A kissé feledékeny pincér emlékszik, hogy miből mennyit rendeltek, de azt már elfelejtette, hogy ki mit kért. Ezért véletlenszerűen osztja ki az italokat. Mekkora a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja, amit rendelt?

$$\left.\begin{array}{l}4 \text{ kóla}\\ 3 \text{ sör}\\ 2 \text{ víz}\end{array}\right\} 9$$

2.mo.

összes: $9!$

$\sqcup\ \sqcup\ \sqcup \dots \sqcup$

1. 2. 3. ... 9.

$k_1, k_2, k_3, k_4, s_1, s_2, s_3, v_1, v_2$ permutációi

kedvező: $4!\,3!\,2!$

kóla: $\to$ $\underset{\sqcup}{4}\ \underset{\sqcup}{3}\ \underset{\sqcup}{2}\ \underset{\sqcup}{1} \to 4!$

sör: $3!$

víz: $2!$

$\Big\}\ 4!\,3!\,2!$

1.mo

összes eset: $\dfrac{9!}{4!\,3!\,2!}$ $\leftarrow$ $k, k, k, k, s, s, s, v, v$ elemek sorrendjei

kedvező eset: 1

$$\underbrace{\underset{\sqcup}{v}\ \underset{\sqcup}{v}}_{\text{víz}}\ \underbrace{\underset{\sqcup}{k}\ \underset{\sqcup}{k}\ \underset{\sqcup}{k}\ \underset{\sqcup}{k}}_{\text{kóla}}\ \underbrace{\underset{\sqcup}{s}\ \underset{\sqcup}{s}\ \underset{\sqcup}{s}}_{\text{sör}}$$

$$P(\text{mindenki jót kap}) = \frac{1}{\frac{9!}{4!\,3!\,2!}} = \frac{4!\,3!\,2!}{9!}$$

3. Egy pénzügyi befektető cég három cégbe fekteti pénzét, melyek rendre $0,19$, $0,25$, illetve $0,28$ valószínűséggel mennek csődbe az elkövetkező öt évben. Annak a valószínűsége, hogy az első és a második cég is csődbe megy $0,05$, hogy az első és a harmadik is csődbe megy $0,1$, míg hogy a második és a harmadik is becsődöl annak is $0,1$. Annak az esélye, hogy mindhárom cég becsődöl 2%. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) az első vagy a második cég csődbe megy?

(b) egyik cég sem megy csődbe?

az elkö. 5 évben

A_i: i-edik cég csődbe megy $\quad i=1,2,3$

$P(A_1)=0,19, \quad P(A_2)=0,25, \quad P(A_3)=0,28$

$P(A_1 \underset{\text{és}}{\cap} A_2)=0,05 \quad P(A_1\cap A_3)=0,1, \quad P(A_2\cap A_3)=0,1$

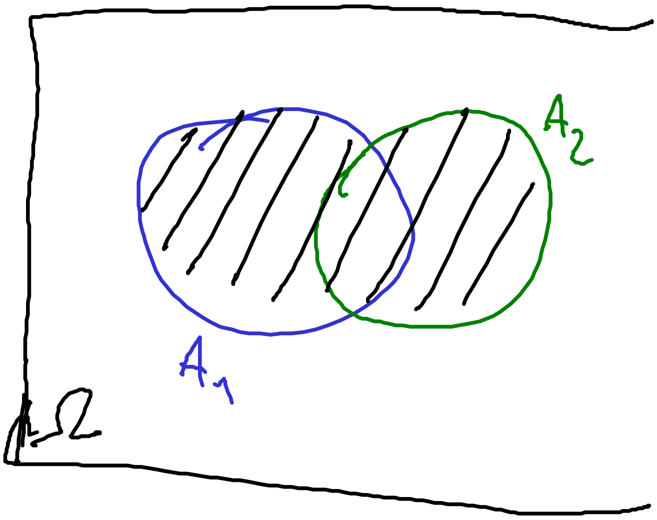
$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=0,02$

a) az első vagy a második csődbe megy $= A_1 \cup A_2$

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)$$

$$=0,19+0,25-0,05$$

$$=\underline{\underline{0,39}}$$



b) egyik sem megy össze =

$$= (A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$$

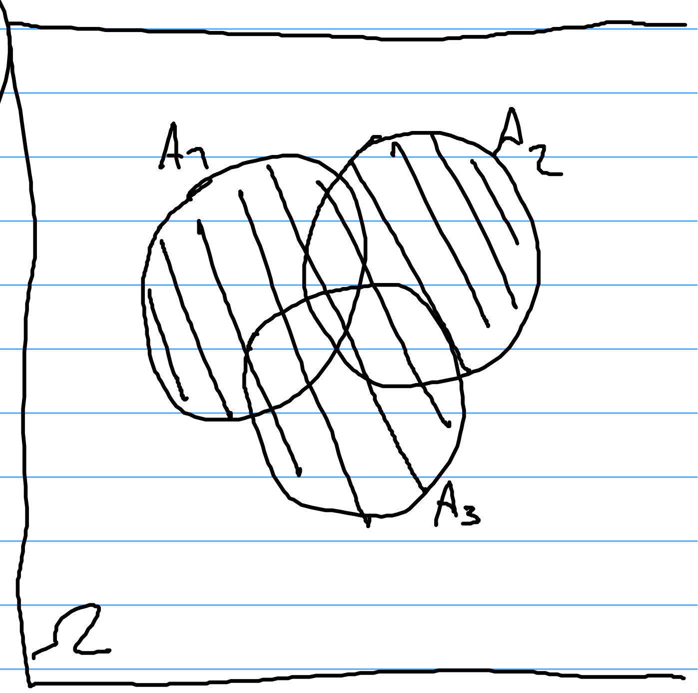
$$P((A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \overset{\text{szita 3-ra}}{=} P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$- \big(P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3)\big)$$

$$+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$= \ldots$$



4. Egy urnában k-féle színű golyó van, mindegyik színűből ugyanannyi darab. Egyenként húzunk a golyókból úgy, hogy minden húzás után visszatesszük a kihúzott golyót, és minden húzásnál bármelyik golyó ugyanolyan valószínűséggel kerülhet kihúzásra.

(a) Mennyi annak a q_n valószínűsége, hogy legalább n húzás kellett ahhoz, hogy minden szín előforduljon?

(b) Mennyi annak a p_n valószínűsége, hogy n húzás során minden szín előfordult, és ez az n-edik húzásnál következik be először (vagyis az első $(n-1)$ húzás során csak $(k-1)$ szín fordult elő) ?

a) A_n = legalább n húzás kell

$\boxed{k=3 \quad n=5}$

legalább 5 húzás kell, hogy legyen minden szín

PZPZ$\boxed{\text{K}}$

PPPPPZK

legalább 5 húzás kell = első 4 húzás legfeljebb 2 szín

= első 4 húzásnál nincs minden szín

A_5 = az első 4 húzásnál nincs minden szín

$A_5^{(1)}$ = nincs 1-es szín

$A_5^{(2)}$ = nincs 2-es

$A_5^{(3)}$ = nincs 3-as

az első 4 húzásnál

valamelyik nincs $\qquad$ nincs piros $\qquad$ nincs kék $\qquad$ nincs zöld

$$A_5 = A_5^{(1)} \cup A_5^{(2)} \cup A_5^{(3)}$$

vagy $\qquad$ vagy

$$P\Big(\underbrace{A_5^{(1)}}\Big) = \frac{2^4}{3^4} = P(A_5^{(2)}) = P(A_5^{(3)})$$

4 húzás során
nincs piros

$$P\Big(\underbrace{A_5^{(1)} \cap A_5^{(2)}}\Big) = \frac{1}{3^4} = P(A_5^{(1)} \cap A_5^{(3)}) =$$
$$= P(A_5^{(2)} \cap A_5^{(3)}).$$

4 húzás során
nincs piros és kék

$$P\Big(\underbrace{A_5^{(1)} \cap A_5^{(2)} \cap A_5^{(3)}}_{=\emptyset}\Big) = 0$$

(lehet $P(A)=0$
úgy hogy $A \neq \emptyset$)

$$q_5 = P(A_5) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{j+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le 3} P(A_5^{(i_1)} \cap A_5^{(i_2)} \cap \dots \cap A_5^{(i_j)})$$

$$= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{j+1} \binom{3}{j} \cdot \left(\frac{3-j}{3}\right)^4$$

Általában: k szín

$$q_n = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \cdot \binom{k}{j} \left(\frac{k-j}{k}\right)^{n-1}$$

b) n húzás során minden szín, és az az első ilyen.

$\parallel$

B_n

A_n: legalább n húzás kell.

$$B_n \subseteq A_n$$

$$\left.\begin{aligned} B_n &= A_n \setminus A_{n+1} \\ A_n &\supset A_{n+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(B_n) = P(A_n) - P(A_{n+1})$$

$$P(B_n) = q_n - q_{n+1}.$$

5. A $[0,1]$ intervallumot felosztjuk két véletlenül rádobott ponttal három részre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

(a) mindhárom szakasz hossza nagyobb, mint $1/4$?

(b) mindhárom szakasz hossza kisebb mint $1/2$?

(c) a szakaszokból háromszög szerkeszthető?

(d) a szakaszokból hegyesszögű háromszög szerkeszthető?

6. András és Betti munkaideje egymástól függetlenül egy-egy du. 4 és 6 közötti egyenletes eloszlású időpontban ér véget. Munkaidejük végeztével mindketten elmennek egy, munkahelyüktől azonos távolságra levő kávézóba, ahol elfogyasztanak egy csésze kávét. András esetében ez 10 perc, Betti esetében 20. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak?

7. Tekintsünk egy egységnyi kerületű kört, és ennek egy rögzített pontját. Válasszunk további két pontot a körvonalon egymástól függetlenül egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy a három pont által meghatározott háromszög fedi a kör középpontját?

8. Egy kör kerületén válasszunk n pontot egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pontok konvex burka tartalmazza a kör középpontját? Mennyi ez a valószínűség, ha a pontokat a kör belsejében választjuk függetlenül, egyenletes eloszlás szerint?