Valószínűségszámítás

2. feladatsor: Szita formula, kombinatorikus és geometriai valószínűség, vegyes

Megoldások

1. Egy vendéglőben az egyik asztalnál 9 vendég ül. Négyen kólát, hárman sört rendeltek, ketten pedig ásványvizet rendeltek. A kissé feledékeny pincér emlékszik, hogy miből mennyit rendeltek, de azt már elfelejtette, hogy ki mit kért. Ezért véletlenszerűen osztja ki az italokat. Mekkora a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja, amit rendelt?

Megoldás. A vendégeknek az italokat 9!-féleképpen oszthatja ki a pincér. Ekkor megkülönböztettük a kólákat! A kedvező leosztások száma

$$4! \cdot 3! \cdot 2,$$

hiszen a kólákat 4!-féleképpen oszthatja ki jó, a söröket 3!-féleképpen, a vizeket pedig 2-féleképpen. Tehát a keresett valószínűség

$$\mathbf{P}(\text{ mindenki azt kapja amit rendelt }) = \frac{4! \cdot 3! \cdot 2}{9!}.$$

2. megoldás. Nem kell megkülönböztetnünk az azonos italokat. Ekkor az összes esetek száma

$$\frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2},$$

hiszen a kólákat 4!-féleképpen, a söröket 3!-féleképp, a vizeket 2-féleképp permutálhatjuk. Ha az összes eseteket így számoljuk, akkor kedvező eset csak 1 van, amikor mindenki azt kapja amit kért. Tehát a keresett valószínűség

$$\mathbf{P}(\text{ mindenki azt kapja amit rendelt }) = \frac{4! \cdot 3! \cdot 2}{9!},$$

ami persze ugyanaz, mint az előbb. Többféleképpen számolhatjuk az eseteket, de arra kell nagyon ügyelni, hogy ugyanúgy számoljuk az összes esetet, mint a kedvezőt.

3. Mekkora a valószínűsége, hogy az ötöslottón kihúzott számok között nem lesznek egymást követők?

Megoldás. Ez egy kicsit nehezebb. Mivel 90 szám közül választunk ki ötöt, így az összes esetek száma

$$\binom{90}{5}.$$

A kedvező eseteket trükkös összeszámolni. A keresett esemény

$$A = \{(i_1, i_2, \dots, i_5) \, : 1 \le i_1 < i_2 - 1 < i_3 - 2 < i_4 - 3 < i_5 - 4 \le 86\},$$

hiszen az, hogy nincsenek szomszédosak, pontosan azt jelenti, hogy $i_2 > i_1+1$, $i_3 > i_2 + 1$, ..., $i_5 > i_4 + 1$, ami átrendezve ugyanaz ami fönt van. Ekkor majdnem kész is vagyunk, hiszen az $(i_1, i_2-1, \dots, i_5-4)$ az $1, \dots, 86$ számok közül kiválasztott számötös, azaz az ilyenek száma

$$\binom{86}{5}.$$

Valójában megadtunk egy bijekciót (egy-egy értelmű leképezést) a nemszomszédos számötösök halmaza és az $1, \dots, 86$ halmaz számötösei között. Tehát a keresett valószínűség

$$\mathbf{P}(\text{nincs szomszédos}) = \frac{\binom{86}{5}}{\binom{90}{5}}.$$

4. Egy pénzügyi befektető cég három cégbe fekteti pénzét, melyek rendre $0,19$, $0,25$, illetve $0,28$ valószínűséggel mennek csődbe az elkövetkező öt évben. Annak a valószínűsége, hogy az első és a második cég is csődbe megy $0,05$, hogy az első és a harmadik is csődbe megy $0,1$, míg hogy a második és a harmadik is becsődöl annak is $0,1$. Annak az esélye, hogy mindhárom cég becsődöl 2%. Mennyi a valószínűsége, hogy

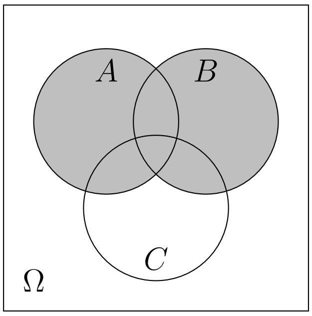
(a) az első vagy a második cég csődbe megy?

(b) egyik cég sem megy csődbe?

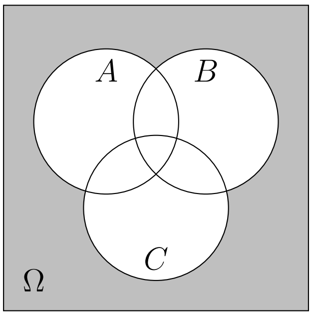
Megoldás. Ez egy egyszerű szita-formulás feladat. Jelölje A, B, illetve C azt az eseményt, hogy az első, második, illetve harmadik cég csődbe megy az első öt évben. A feladat megadja a egyes, kettes és hármas metszetek valószínűségét.

(a) Az, hogy az első vagy a második cég csődbe megy a $A \cup B$ esemény. Ennek a valószínűsége

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) = 0,19 + 0,25 - 0,05 = 0,39.$$



1. ábra. Az első vagy a második csődbe megy.



2. ábra. Egyik sem megy csődbe.

(b) Az, hogy egyik cég sem megy csődbe, az a $(A \cup B \cup C)^c$ esemény. A szita formula szerint

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) \\
&\quad - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C) \\
&\quad + \mathbf{P}(A \cap B \cap C) \\
&= 0,19 + 0,25 + 0,28 - 0,05 - 0,1 - 0,1 + 0,02 \\
&= 0,45.
\end{aligned}$$

7. Egy urnában k-féle színű golyó van, mindegyik színűből ugyanannyi darab. Egyenként húzunk a golyókból úgy, hogy minden húzás után visszatesszük a kihúzott golyót, és minden húzásnál bármelyik golyó ugyanolyan valószínűséggel kerülhet kihúzásra.

(a) Mennyi annak a q_n valószínűsége, hogy legalább n húzás kellett ahhoz, hogy minden szín előforduljon?

(b) Mennyi annak a p_n valószínűsége, hogy n húzás során minden szín előfordult, és ez az n-edik húzásnál következik be először (vagyis az első $(n-1)$ húzás során csak $(k-1)$ szín fordult elő) ?

Megoldás. Ez egy kicsit nehezebb szita-formulás feladat.

(a) Az, hogy legalább n húzás kell, hogy minden szín előforduljon pontosan azt jelenti, hogy $n-1$ húzás után még nem volt minden szín. Jelölje $A_{i,n-1} = A_i k$ azt az eseményt, hogy az első $n-1$ húzás során nem volt i színű golyó. Ekkor az az esemény, hogy $n-1$ húzás után nem volt minden szín, pontosan azt jelenti, hogy az A_1, A_2, …, A_k események közül legalább egy bekövetkezett, azaz

$$C_n := \{\text{legalább } n \text{ húzás kell}\} = \cup_{i=1}^{k} A_i.$$

Az A_i események nem kizáróak, ezért az unió valószínűségét szita-formulával határozhatjuk meg. Eszerint

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_k) &= \mathbf{P}(A_1) + \ldots + \mathbf{P}(A_k) \\
&\quad - [\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) + \ldots + \mathbf{P}(A_{k-1} \cap A_k)] \\
&\quad \ldots \\
&\quad \pm \mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_k) \\
&= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} \mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_j),
\end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőségnél felhasználtuk, hogy a j-es metszetek valószínűségei megegyeznek (hát persze, ugyanakkora valószínűséggel nem volt sem piros sem kék, mint sárga meg zöld. A metszetek valószínűségeit könnyű meghatározni. Valóban

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{(k-1)^{n-1}}{k^{n-1}},$$

hiszen az összes eset k^{n-1}, mert az $n-1$ húzás során mindig k-féle golyót kaphatunk, és a kedvező esetek száma meg $(k-1)^{n-1}$, hiszen 1-es színű golyót nem húztam, bármi más lehetett. Hasonlóan,

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{(k-2)^{n-1}}{k^{n-1}},$$

hiszen ekkor már sem 1-es sem 2-es színű golyót nem húzhattam. Általánosan

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_j) = \frac{(k-j)^{n-1}}{k^{n-1}}.$$

Ezt visszahelyettesítve

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\cup_{j=1}^{k} A_j) &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} \mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} \frac{(k-j)^{n-1}}{k^{n-1}}.\end{aligned}$$

(b) Legyen D_n az az esemény, hogy pontosan n húzás kellett. Könnyű látni, hogy

$$D_n = C_n \backslash C_{n+1},$$

hiszen ha pontosan n kellett, akkor legalább n kellett, de nem kellett $n+1$. Nyilván $C_n \supset C_{n+1}$, hiszen ha legalább $n+1$ húzás kellett, akkor legalább n, ezért

$$\mathbf{P}(D_n) = \mathbf{P}(C_n) - \mathbf{P}(C_{n+1}).$$

10. A $[0,1]$ intervallumot felosztjuk két véletlenül rádobott ponttal három részre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

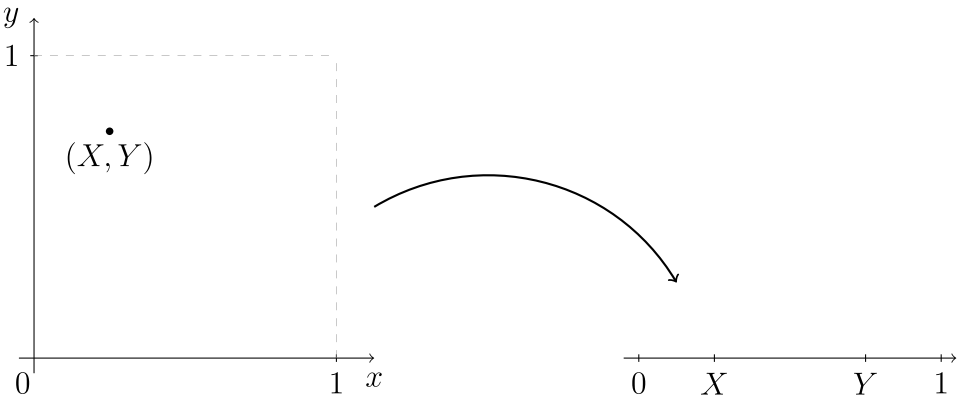
(a) mindhárom szakasz hossza nagyobb, mint $1/4$?

(b) mindhárom szakasz hossza kisebb mint $1/2$?

(c) a szakaszokból háromszög szerkeszthető?

(d) a szakaszokból hegyesszögű háromszög szerkeszthető?

Megoldás. Csak az (a) részt csináljuk meg. Két pontot választunk a $[0,1]$ intervallumon, jelölje X az elsőnek, Y a másodiknak választott pontot. Nagyon fontos, hogy nem a kisebb és nagyobb, azaz lehet, hogy X a nagyobb, lehet, hogy Y. Ekkor (X,Y) egy pont a $[0,1]^2$ egységnégyzetben, tehát a kísérlet kimenetelei megfeleltethetők az egységnégyzet pontjainak. Azaz egy geometriai valószínűségi mezőnk van, $\Omega = [0,1]^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1]^2)$ (az egységnégyzet Borel-halmazai, vagy a szép halmazok, kinek mi), és mivel az egységnégyzet területe 1, ezért a valószínűség éppen a terület, azaz $\mathbf{P}(A) = \text{ter}(A)$.



Azt kell meghatározni, hogy mi lesz az az esemény, hogy mindhárom szakasz nagyobb, mint 1/4. Az X, Y helyzetétől függően a három szakasz:

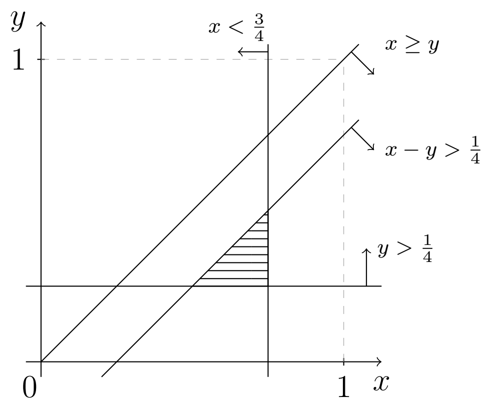
(i) ha $X \geq Y$: $[0, Y]$, $[Y, X]$, és $[X, 1]$.

(ii) ha $X \leq Y$: $[0, X]$, $[X, Y]$, és $[Y, 1]$.

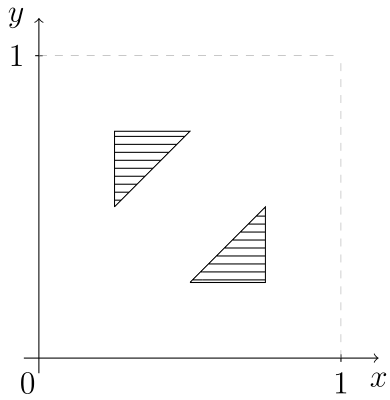
Nézzük az (i) esetet. Ekkor a jobb alsó háromszögben vagyunk. A szakaszok hosszai: $Y, X - Y, 1 - X$. Tehát az kell, hogy

$$Y > \frac{1}{4}, \quad X - Y > \frac{1}{4}, \quad 1 - X > \frac{1}{4}.$$

Tehát az egységnégyzet azon részét kell meghatározni, ahol mindhárom egyenlőtlenség teljesül. Na de ez könnyű:



A (ii) eset hasonlóan tárgyalható (szimmetria okokból is következik). Azt kapjuk, hogy a kedvező síkrész két 1/4 befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög:



Azaz a kedvező terület 1/16 és a keresett valószínűség

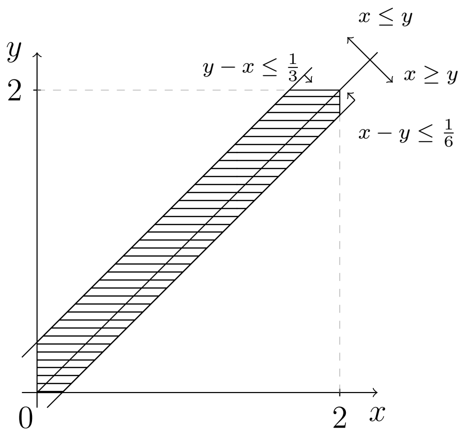
$$\mathbf{P}(\text{ mindhárom szakasz } 1/4\text{-nél hosszabb }) = \frac{1}{16}.$$

14. András és Betti munkaideje egymástól függetlenül egy-egy du. 4 és 6 közötti egyenletes eloszlású időpontban ér véget. Munkaidejük végeztével mindketten elmennek egy, munkahelyüktől azonos távolságra levő kávézóba, ahol elfogyasztanak egy csésze kávét. András esetében ez 10 perc, Betti esetében 20. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak?

Megoldás. A kísérlet két véletlen pont választásával írható le. Legyen $4+X$, ill. $4+Y$ az az időpont órában, amikor András, ill. Betti végez. Ekkor a kísérlet megfeleltethető egy véletlen pont választásának a $[0,2]^2$ négyzetben. Tehát $\Omega = [0,2]^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,2]^2)$, és $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$, a normalizált terület, azaz

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{ter}(A)}{4}.$$

Azt az eseményt kell leírnunk, hogy András és Betti találkoznak. Ha András végez hamarabb, azaz $X \le Y$, akkor mivel ő csak 10 percet (1/6 órát) kávézik, pontosan akkor találkoznak, ha $Y \le X + 1/6$. Ha viszont Betti véges hamarabb, azaz $Y \le X$, akkor pontosan akkor találkoznak, ha $X \le Y + 1/3$. Tehát ezt a síkrészt kell meghatározni, majd ennek a területét kiszámolni. A fentiek szerint a keresett síkrész:



A kedvező terület

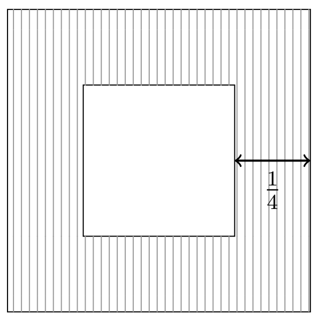
$$4 - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{67}{72},$$

így a keresett valószínűség

$$\mathbf{P}(\text{találkoznak}) = \frac{67}{288}.$$

16. Egy négyzet belsejében egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a választott pont közelebb van valamelyik oldalhoz, mint 1/4?

Megoldás. A kísérlet egy geometriai valószínűségi mezőn írható le, ahol az eseménytér az egységnégyzet, az események az egységnégyzet Borel-halmazai (szép halmazai), és valószínűség pedig a terület, azaz $\Omega = [0,1]^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1]^2)$, $\mathbf{P}(A) = \text{ter}(A)$. A kedvező síkrész:



A kedvező terület, ami éppen a keresett valószínűség

$$\mathbf{P}(\text{közelebb van mint } 1/4) = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$