A sztochasztika alapjai

1. feladatsor: valószínűségi mező, események, ksombinatorikus valószínűség

1. Egy szabályos érmét kétszer feldobunk. Adjuk meg a kísérlet egy matematikai modelljét! Adjuk meg azt az eseményt, hogy (i) dobunk fejet; (ii) két fejet dobunk!

Oldjuk meg a feladatot, ha az érme cinkelt, és a fejdobás valószínűsége p!

Ω : eseménytér lehetséges kimenetelek halmaza

$\mathcal{A}$: események halmaza: Ω részhalmazainak halmaza

$\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega \leftarrow \Omega$ hatványhalmaza ; $\mathcal{A}$ σ-algebra

P : valószínűség

$P : \mathcal{A} \to [0,1]$: - $P(\Omega) = 1$

- A_i diszjunktak $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

$$\Omega = \{(F,F),(F,I),(I,F),(I,I)\}$$

$$4 = |\Omega| < \infty \qquad \mathcal{A} = 2^\Omega$$

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{(F,F)\}, \{(F,I)\}, \ldots, \{(I,I)\}, \{(F,F),(F,I)\}, \ldots, \{(F,F),(F,I),(I,F),(I,I)\}\}$$

$$|\mathcal{A}| = 2^4 \qquad (\Omega, \mathcal{A})$$

Kell: $P : \mathcal{A} \to [0,1]$

szabályos: fej valsége $\frac{1}{2}$

$P(A) =$

$P(\emptyset) = 0 \quad P(\{(F,F)\}) = \frac{1}{4}$

$P(\{(I,F)\}) = \frac{1}{4}$

$P(\{(F,F),(I,I)\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$P(A) = \frac{|A|}{4} \qquad \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$$

Általában: $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$

elemi esemény

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ val. mező

i) A = dobunk fejet $= \{(F,F),(F,I),(I,F)\}$

ii) B = két fejet dobunk $= \{(F,F)\}$

$P(A) = \frac{3}{4} \quad P(B) = \frac{1}{4}$.

b) fej valsége : $p \in (0,1)$.

Ω ugyanaz, $\mathcal{A}$ ugyanaz

$\tilde{P}(\{(F,F)\}) = p^2 \quad \tilde{P}(\{(F,I)\}) = p \cdot (1-p) = \tilde{P}(\{(I,F)\})$

$$\tilde{P}(\{(I,I)\}) = (1-p)^2$$

$$\tilde{P}(A) = \sum_{\omega \in A}{}' \tilde{P}(\{\omega\})$$

$$\tilde{P}(\text{dobunk fej})= p^2 + 2\cdot p(1-p).$$

Ha $p \neq \frac{1}{2}$ akkor $(\Omega, \mathcal{A}, \tilde{P})$ nem klasszikus

2. Adjuk meg a *lottóhúzást* leíró valószínűségi mezőt! Mennyi annak a valószínűsége, hogy pont 3 találatunk lesz? Mennyi a valószínűsége, hogy lesz találatunk?

90 számból 5-öt $1, 2, \ldots, 90$

$\Omega = \{1, \ldots, 90\}^5$ Nem jó!

$\{1, \ldots, 90\}$ számokból képzett számötösök

$$\{1, 2, \ldots, 90\}^5 = \{(a_1, a_2, \ldots, a_5) : a_i \in \{1, \ldots, 90\}\}$$

itt benne van az $(1,1,1,1,1)$. Ez nem lehetséges kimenetel.

Fontos: minden elem különböző.

$$\Omega = \{(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) : 1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_5 \leq 90\}$$

$$|\Omega| = \binom{90}{5}$$ ← 90 elemű halmaz 5 elemű részhalmazainak száma

$$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$$

$$\binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot \ldots \cdot 86}{5!} = 43\,949\,268$$

$$P : \mathcal{A} \to [0, 1]$$

Minden számötös ugyanakkora valségű $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ **Klasszikus** val. mező.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{\binom{90}{5}} \qquad \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Mennyi a valség, hogy pont 3 találatunk lesz?

kedvező: $\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2}$ ← ezek nem a mi számaink

összes: $\binom{90}{5}$ ← mi 3 számunk

$$P(\text{pontosan } 3 \text{ tal}) = \frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}$$

A: pontosan 3 tal

egy szelvény: a számaink: $(1,2,3,4,5)$ (szelvény/ sorrendben)

$$A = \{ (n_1, n_2, \dots, n_5) : |\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\} \cap \{1, \dots, 5\}| = 3 \}$$

Mennyi a valség, hogy lesz találatunk?

$$P(\text{lesz tal.}) = 1 - P(\text{nem lesz tal}) = 1 - \frac{\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}}.$$

$$P(\text{nem lesz tal}) = \frac{\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}}$$

kedvező: $\binom{85}{5}$

összes: $\binom{90}{5}$

Mennyi a valség, hogy a kihúzott számok között vannak szomszédosak?

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

összes: $\binom{90}{5}$

kedvezőtlen: vannak szomszédosak

5 egymást követő: 86

4 egymást követő, 1 másik: ...

3 egymást, 1, 1

3 egymást, 2

⋮

rengeteg különböző lehetőség

nincsenek szomszédosak $= A = \{(n_1, n_2, \dots, n_5) : (*)\}$

$1 \leq n_1, \; n_2 > n_1 + 1, \; n_3 > n_2 + 1, \; n_4 > n_3 + 1, \; n_5 > n_4 + 1$

$(*)$: $1 \leq n_1 < n_2 - 1 < n_3 - 2 < n_4 - 3 < n_5 - 4 \leq 86$

$1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5 \leq 86$

$$\begin{cases} n_1 = k_1 \\ n_2 = k_2 + 1 \\ n_3 = k_3 + 2 \\ n_4 = k_4 + 3 \\ n_5 = k_5 + 4 \end{cases}$$

$|A| = \binom{86}{5}$

$P(A) = \dfrac{\binom{86}{5}}{\binom{90}{5}}$ //

3. Fejezzük ki az A, B, C halmazokkal az alábbi eseményeket!

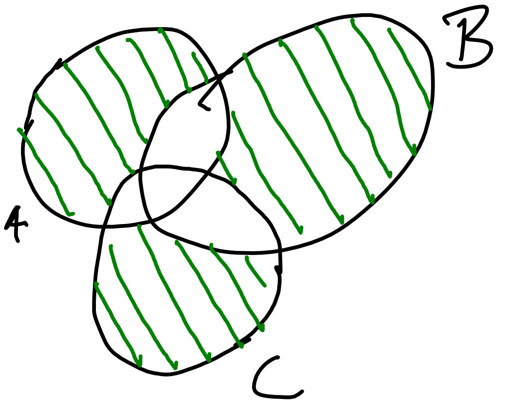
(a) Az A, B, C események közül pontosan $k \in \{1, 2, 3\}$ következik be.

(b) Az A, B, C események közül legalább k következik be.

(c) Az A, B, C események közül legfeljebb k következik be.

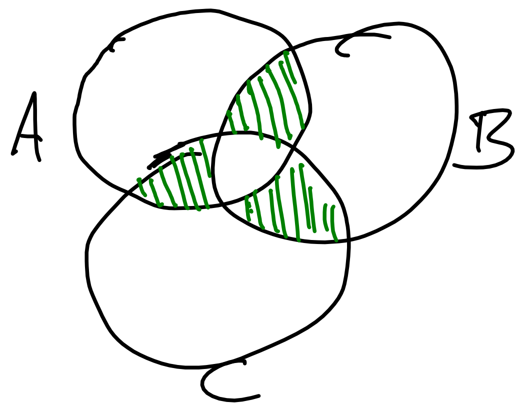
a) A, B, C

A, B, C közül pontosan 1 következik be $= D_1$



$$D_1 = (A \cup B \cup C) - \big((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)\big)$$

A, B, C közül pontosan 2 következik be $= D_2$



$$D_2 = \big((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)\big) - (A \cap B \cap C)$$

4. Hét törpe közül Hófehérke leültet ötöt egy kör alakú asztalhoz. Tegyük fel, hogy az összes lehetséges elrendezés egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy Morgó és Kuka nem kerül egymás mellé?

Klasszikus val. mező

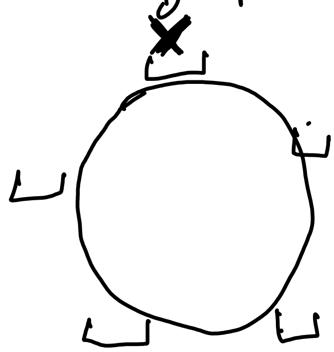
asztalnál

összes : $\binom{7}{5} \cdot 4!$

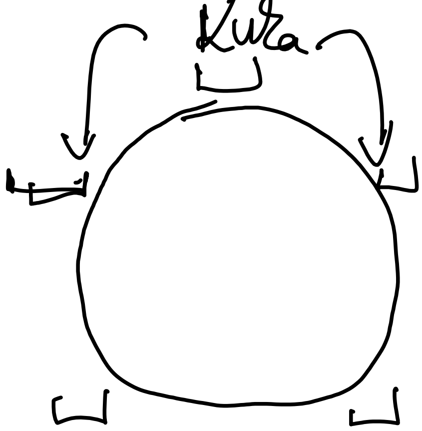
melyik 5 törpe ül

$\boxed{7 \to 5}$ $\longrightarrow$ 4!

$\binom{7}{5}$



Morgó 2 helyre kerülhet



kedvezőtlen: (egymás mellé ülnek)

$\binom{5}{3} \cdot 2 \cdot 3!$

Morgó és Kukán kívül maradék 5 közül kell 3.

a kimaradó 3 helyre a 3 másik törpe

Tehát : P(nem kerül M és K egymás mellé) =

$= 1 - P(\text{copymus mellé})$

$$= 1 - \frac{2 \cdot 3! \cdot \binom{5}{3}}{\binom{7}{5} \cdot 4!} = \ldots$$

5. Száz alma közül tíz férges. Véletlenül kiválasztva ötöt, mi a valószínűsége, hogy lesz közte férges?

6. A Bajnokok Ligájában 2017-ben három spanyol csapat jutott a 8 közé: az Atlético Madrid, a Barcelona és a Real Madrid. Sorsolással határozták meg a negyeddöntők párosítását (itt már nincs kiemelés, és azonos nemzet csapatai is összekerülhetnek). Mennyi volt a sorsolás előtt a valószínűsége annak, hogy a negyeddöntőben

(a) Barcelona – Real Madrid párharc lesz?

(b) lesz spanyol párharc?

Klasszikus val. mező

összes: $\binom{8}{2}\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}$ ← van sorrendje a pároknak

1. – $\binom{8}{2}$

2. – $\binom{6}{2}$

3. – $\binom{4}{2}$

4. – $\binom{2}{2}$

Kedvező!!: $\binom{2}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}\cdot \underbrace{4}$

rögzített a Barc. RM pár

hanyadik pár a B & RM

$$P(\text{lesz B \& RM}) = \frac{4\cdot\cancel{\binom{6}{2}}\cdot\cancel{\binom{4}{2}}}{\binom{8}{2}\cancel{\binom{6}{2}}\cancel{\binom{4}{2}}} = \frac{4}{\frac{8\cdot 7}{2}} = \frac{1}{7}.$$

b) összes: $\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}$

kedvező: $\binom{3}{2}\cdot 4 \binom{6}{2}\binom{4}{2}$

melyik 2 spanyol csapat — hányadik pár

$$P(\text{van spanyol párharc}) = \frac{\binom{3}{2} 4 \cancel{\binom{6}{2}}\cancel{\binom{4}{2}}}{\binom{8}{2}\cancel{\binom{6}{2}}\cancel{\binom{4}{2}}} = \frac{3}{7}$$

7. Egy unatkozó gyakorlatvezető dolgozatiratás során arra lett figyelmes, hogy a csoportjában az összes lány egy sorban ül. A csoportban 10 hallgató van, közülük 3 lány. A teremben 4 sor van és minden sorban 4 hely, és feltesszük, hogy mindenki véletlenszerűen választ helyet, azaz minden leülési konfiguráció egyforma valószínűségű. Mennyi a kérdéses esemény valószínűsége?

8. Egy halastóban M aranyhal és K ezüsthal van. Egy horgász addig fogja ki egyesével a halakat, amíg már csak egyszínű hal marad a tóban (tehát vagy csupa aranyhal, vagy csupa ezüsthal). Mennyi a valószínűsége, hogy a Gyuri nevű ezüsthal megússza a horgászkalandot?

9. Igazoljuk, hogy egy σ-algebra zárt a metszet-, és különbségképzésre; azaz ha $\mathcal{A}$ σ-algebra, és $A, B \in \mathcal{A}$, akkor $A \cap B \in \mathcal{A}$ és $A \backslash B \in \mathcal{A}$.

10. Legyen Ω tetszőleges alaphalmaz, és legyen

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : \text{ vagy } A, \text{ vagy } A^c \text{ véges}\}.$$

Igazoljuk, hogy $\mathcal{A}$ halmazrendszer algebra (csak véges unióra kell zárt legyen, nem megszámlálhatóra), és pontosan akkor σ-algebra, ha Ω véges!