Valószínűségszámítás

1. feladatsor: valószínűségi mező, események, kombinatorikus valószínűség

Megoldások

1. Egy szabályos érmét kétszer feldobunk. Adjuk meg a kísérlet egy matematikai modelljét! Adjuk meg azt az eseményt, hogy (i) dobunk fejet; (ii) két fejet dobunk!

Oldjuk meg a feladatot, ha az érme cinkelt, és a fejdobás valószínűsége p!

Megoldás. Kétszer dobjuk fel az érmét, ezért van egy első és egy második dobás. Tehát a lehetséges kimenetelek

$$\Omega = \{(F, F), (F, I), (I, F), (I, I)\}.$$

Figyeljünk a jelölésre: (F, I) azt jelenti, hogy az első dobás fej, a második írás, azaz ez egy vektor, aminek van első és van második komponense. A $\{\}$-zárójel halmazt jelöl, amiben az elemeknek nincsen sorrendje. Ez egy fontos formalizmus.

A lehetséges kimenetelek száma 4. Ekkor az események halmazát választhatjuk a hatványhalmaznak, azaz az Ω összes részhalmaza esemény. Ezek

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = 2^{\Omega} = \Big\{&\emptyset, \{(F, F)\}, \{(F, I)\}, \{(I, F)\}, \{(I, I)\},\\ &\{(F, F), (F, I)\}, \{(F, F), (I, F)\}, \{(F, F), (I, I)\},\\ &\{(F, I), (I, F)\}, \{(F, I), (I, I)\}, \{(I, F), (I, I)\},\\ &\{(F, F), (F, I), (I, F)\}, \{(F, F), (F, I), (I, I)\},\\ &\{(F, F), (I, F), (I, I)\}, \{(F, I), (I, F), (I, I)\},\\ &\{(F, F), (F, I), (I, F), (I, I)\}\Big\}\end{aligned}$$

Egy n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van, azaz $|2^{\Omega}| = 2^{|\Omega|}$ (milyen praktikus jelölés), azaz esetünkben $|\mathcal{A}| = 2^4 = 16$. Ez még kis Ω esetén is elég nagy, úgyhogy többször nem írom ezeket ki.

Az az esemény, hogy dobunk fejet azt jelenti, hogy vagy az első, vagy (nem kizáró vagy!) a második dobás fej. Azaz

$$A = \{\text{dobunk fejet}\} = \{(F, F), (F, I), (I, F)\}.$$

Azaz a megfelelő halmaznak 3 eleme van, ez egy összetett esemény.

Az az esemény, hogy két fejet dobunk az egyetlen (F, F) kimenetelt tartalmazza, azaz

$$B = \{\text{két fejet dobunk}\} = \{(F, F)\},$$

ez egy elemű, tehát elemi esemény.

Vegyük észre, hogy eddig nem kellett az, hogy az érme cinkelt-e vagy szabályos. Csak a lehetséges kimenetelek kellettek, azaz a fontos, hogy hányszor dobjuk fel az érmét. Szabályos érme esetén a fej és az írás valószínűsége egyaránt 1/2, ahonnan látjuk, hogy mind a négy lehetséges kimenetel egyformán valószínű. Tehát klasszikus valószínűségi mezőnk van, így $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{4}.$$

Cinkelt érme esetén p a fej valószínűsége, $1-p$ az írásé. Ekkor, a (F,F) valószínűsége p^2, hiszen mindkétszer fejet kaptunk, azaz

$$\mathbf{P}(\{(F,F)\}) = p^2.$$

Kicsit körülményes a formalizmus, de ilyen. Valószínűsége eseménynek van. Tehát annak az (F,F) elemi eseménynek a valószínűségét vizsgáljuk. Mivel a valószínűség additív halmazfüggvény, elég az elemi események valószínűségét megadni. Ezek

$$\mathbf{P}(\{(F,I)\}) = p\cdot(1-p), \quad \mathbf{P}(\{(I,F)\}) = p\cdot(1-p), \quad \mathbf{P}(\{(I,I)\}) = (1-p)^2.$$

2. Adjuk meg a *lottóhúzást* leíró valószínűségi mezőt! Mennyi annak a valószínűsége, hogy pont 3 találatunk lesz? Mennyi a valószínűsége, hogy lesz találatunk?

Megoldás. A klasszikus ötöslottón az $1,2,\ldots,90$ számok közül húznak ki véletlenszerűen ötöt. Azaz a kísérlet lehetséges kimenetelei számötösök. Mivel a számok kihúzási sorrendje nem számít, ezért növekvő sorrendbe rendezzük az öt számot. Tehát

$$\Omega = \{(a_1,a_2,\ldots,a_5) : 1 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_5 \le 90\}.$$

Egy 90 elemű halmaz 5 elemű részhalmazainak száma

$$|\Omega| = \binom{90}{5} = \frac{90\cdot 89\cdot\ldots\cdot 86}{5!} = 43\,949\,268.$$

Véges alaphalmaz esetén az események halmazát választhatjuk a hatványhalmaznak, azaz

$$\mathcal{A} = 2^{\Omega} = \{\emptyset, \{(1,2,3,4,5)\}, (1,2,3,4,6), \ldots, \Omega\}\,.$$

Mivel bármely számötöst ugyanakkora valószínűséggel húznak ki, ez egy *klasszikus valószínűségi mező*, azaz $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Egy szelvénnyel játszunk, a számaink: $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 \leq 90$. (Játszhatunk az $1, 2, 3, 4, 5$ számokkal is.) Jelölje A azt az eseményt, hogy pontosan 3 találatunk lesz. Ez úgy lehetséges, hogy az $a_1, \ldots, a_5$ számok közül választunk 3-at, amit $\binom{5}{3}$-féleképp tehetünk meg, és a nem megjelölt 85 szám közül ($\{1, \ldots, 90\} \setminus \{a_1, \ldots, a_5\}$ halmazból) kiválasztunk 2 számot. Ez

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2}$$

lehetőség, azaz ennyi a kedvező esetek száma. Tehát a valószínűség

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}.$$

Jelölje B azt az eseményt, hogy lesz találatunk. Ez lehet úgy, hogy pontosan 1, pontosan 2, …, pontosan 5 találatunk van. Ehelyett azt számoljuk, hogy nem lesz találatunk, mert ez „egyféleképpen lehet” úgy, hogy a 85 nem megjelölt számból húznak ki 5-öt. Ez

$$\binom{85}{5}$$

lehetőség. Tehát a valószínűség

$$\mathbf{P}(B) = 1 - \mathbf{P}(B^c) = 1 - \frac{\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}}.$$

4. Három kockával dobva mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 4? Adjuk meg a kísérletet leíró valószínűségi mezőt, ha 3 különböző kockával dobunk, ill. ha 3 egyformával!

Megoldás. Ha három különböző kockával dobunk, akkor világos, hogy a lehetséges kimenetelek halmaza

$$\Omega = \{(i, j, k) : 1 \leq i, j, k \leq 6\}.$$

Egy $\omega = (i, j, k) \in \Omega$ esetén i jelöli az első kockán dobott számot, j a másodikon dobott számot, k pedig a harmadikon dobott számot. Világos, hogy $|\Omega| = 6^3$. Az is világos, hogy minden kimenetel egyformán valószínű, ezért egy klasszikus valószínűségi mezőnk van.

A dobott számok összege úgy lehet 4, ha két 1-est és egy 2-est dobunk, azaz

$$A = \{\text{az összeg } 4\} = \{(1,1,2), (1,2,1), (2,1,1)\}.$$

Ez egy összetett esemény, aminek a valószínűsége

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6^3} = \frac{1}{72}.$$

Ha a kockák látszólag egyformák, akkor mondhatjuk, hogy a lehetséges kimenetelek halmaza

$$\widetilde{\Omega} = \{(i,j,k) : 1 \leq i \leq j \leq k \leq 6\}.$$

Itt az az $\widetilde{A}$ esemény, hogy a dobott számok összege 4 egy elemi esemény, hiszen az egyetlen lehetséges kimenetel $(1,1,2)$.

Itt már az elemszámot is nehezebb meghatározni, de nem ez a fő baj. Vegyük észre, hogy az $(1,1,1)$ lehetséges kimenetel azt jelenti, hogy mindhárom kockával 1-est dobtunk. Ugyanakkor az $(1,1,2)$ kimenetel azt jelenti (ebben a modellben nincs $(1,2,1)$), hogy két kockával 1-est dobtunk, a harmadikkal pedig 2-est. Ekkor persze az $(1,1,2)$ kimenetel valószínűsége nagyobb, egész pontosan háromszorosa az $(1,1,1)$ kimenetel valószínűségének. Tehát a valószínűségi mező nem klasszikus. Persze a keresett valószínűség nem változik.

A tanulság: *Mindig különböztessük meg a kockákat!*.

6. Fejezzük ki az A, B, C halmazokkal az alábbi eseményeket!

(a) Az A, B, C események közül pontosan $k \in \{1,2,3\}$ következik be.

(b) Az A, B, C események közül legalább k következik be.

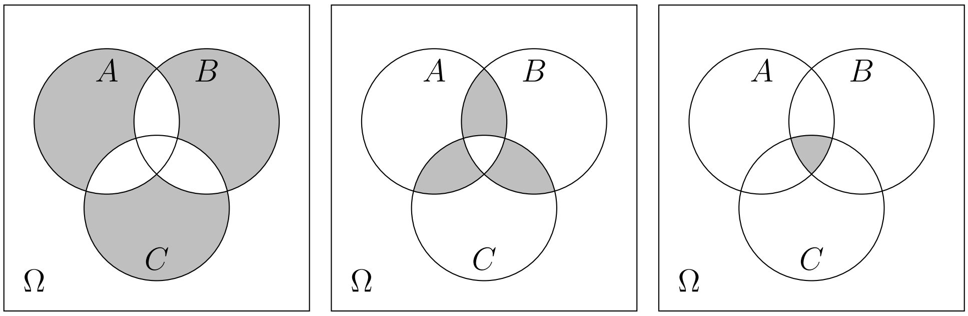
(c) Az A, B, C események közül legfeljebb k következik be.

Megoldás. Csak az (a) részt csináljuk meg. Ha pontosan egy esemény következik be, akkor valamelyik bekövetkezik *és* a másik kettő nem, azaz ez az esemény

$$\{\text{pontosan 1 következik be}\} = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C).$$

Hasonlóan

$$\{\text{pontosan 2 következik be}\} = (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C),$$



1. ábra. $k = 1, 2, 3$

és ha mindhárom bekövetkezik az a legegyszerűbb, hiszen

$$\{\text{pontosan 3 következik be}\} = A \cap B \cap C.$$

11. Hét törpe közül Hófehérke leültet ötöt egy kör alakú asztalhoz. Tegyük fel, hogy az összes lehetséges elrendezés egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy Morgó és Kuka nem kerül egymás mellé?

Megoldás. Minden lehetséges választás egyformán valószínű, ezért klasszikus a valószínűségi mező. Tehát kedvező (vagy kedvezőtlen) és összes esetet kell számolni. Először mindig az összes esetet számoljuk.

Hófehérke $\binom{7}{5}$-féleképp választhat ki 7 törpe közül 5-öt, akik leülnek. Ők 5!-féleképpen ülhetnek le, hiszen az első székre 5, a másodikra 4, …, az ötödikre 1 törpe ülhet. Figyeljünk, most megkülönböztettük a székeket, nem csak a szomszédság számít! Tehát az összes esetek száma

$$\binom{7}{5} \cdot 5!.$$

Mindig meg kell gondolni, hogy a kedvező, vagy a kedvezőtlen eseteket könnyebb összeszámolni. Most talán a kedvezőtlent. Ekkor mindketten az 5 leültetett törpe között vannak, és a maradék 3 törpét Hófehérke $\binom{5}{3}$-féleképp választhatja ki. Az ültetésnél Morgó 5 helyre ülhet, Kuka pedig 2-re, hiszen Morgó mellé kell ültetni. A többi 3 törpét 3!-féleképp lehet leültetni. Összesen

$$\binom{5}{3} \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3!$$

a rossz esetek száma. A keresett valószínűség

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\text{Morgó és Kuka nem ül egymás mellé})\\
&= 1 - \mathbf{P}(\text{Morgó és Kuka egymás mellé ül})\\
&= 1 - \frac{\binom{5}{3} \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3!}{\binom{7}{5} \cdot 5!}\\
&= 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}.
\end{aligned}$$

12. Tíz pár cipőből véletlenül kiválasztunk négy darabot. Mekkora a valószínűsége, hogy nem lesz egy pár sem?

Megoldás. Tíz pár cipő az 20 db cipő, ezért az összes esetek száma

$$\binom{20}{4} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4!} = 4845.$$

Számoljuk a kedvező eseteket. Mivel nincs pár, összesen 4 pár cipőből választok ki egy-egy cipőt, ezt $\binom{10}{4}$-féleképpen tehetem meg, majd mindegyik párból a bal vagy jobb cipőt választhatom 2^4-féleképpen. Összesen

$$\binom{10}{4} \cdot 2^4 = 3360.$$

lehetőség. Tehát a keresett valószínűség

$$\mathbf{P}(\text{nincs pár}) = \frac{\binom{10}{4} \cdot 2^4}{\binom{20}{4}} = \frac{224}{323}.$$

15. A Bajnokok Ligájában 2017-ben három spanyol csapat jutott a 8 közé: az Atlético Madrid, a Barcelona és a Real Madrid. Sorsolással határozták meg a negyeddöntők párosítását (itt már nincs kiemelés, és azonos nemzet csapatai is összekerülhetnek). Mennyi volt a sorsolás előtt a valószínűsége annak, hogy a negyeddöntőben

(a) Barcelona – Real Madrid párharc lesz?

(b) lesz spanyol párharc?

Megoldás. (a) Sokféleképpen számolhatjuk az eseteket. Arra kell mindig figyelni, hogy a kedvezőeket ugyanúgy számoljuk össze, mint az összeset.

A feladat szempontjából lényegtelen, hogy ki kezd otthon, és az is, hogy hanyadiknak húzták ki az adott párt. Tehát az összes eset

$$\frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{4!},$$

hiszen először kiveszem az első párt a 8 csapatból, aztán a maradék 6 csapatból a második párt, majd a 4-ből a harmadik párt, végül a negyedik párt. De azt mondtuk, hogy mindegy a párok sorrendje, ezért leosztom az egészet az összes lehetséges sorrenddel, ami 4!.

Ekkor a kedvező esetek összeszámolásánál rögzítem a Barcelona – Real Madrid párt. A maradék 6 csapatból választom a második párt, majd a maradék 4-ből a harmadikat, végül a negyediket. Most csak 3 párt választottam, ezért 3! a sorrendek száma. Összegezve a kedvező esetek száma:

$$\frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{3!}.$$

A kérdéses valószínűség

$$\mathbf{P}(\text{Barcelona} - \text{RM}) = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{4}{\binom{8}{2}} = \frac{1}{7}.$$

2. megoldás. Miután kijött az 1/7, gyanús, hogy egyszerűbben is lehetett volna:
– Andrés, most akkor a Madriddal játszunk?
– Nem, Leo. Hét csapat közül sorsolnak egyet nekünk. Bármelyiket egyforma eséllyel kapjuk, tehát 1/7 a valószínűsége, hogy a Madriddal játszunk.

(b) A változatosság kedvéért, most máshogy számoljuk az összes esetet. Mindent figyelünk, hogy kit hanyadiknak húztak, ki kezd otthon. Ekkor az összes esetek száma 8!, hiszen az elsőre kihúzott csapat 8-féle lehet, ... Ekkor a kedvező eseteket is eszerint kell számolni. Mivel 3 spanyol csapat van, ezért ha van spanyol párharc, az csak úgy lehet, hogy két spanyol csapat egymás ellen játszik, a harmadik meg mással. Ezt 3-féleképpen tehetjük meg, a két csapat 8-féleképpen játszhat egymás ellen (4 pár, ki kezd otthon). A maradék 6 csapat pedig 6!-féleképpen rendezhetem el. Összesen

$$3 \cdot 8 \cdot 6!.$$

Tehát a keresett valószínűség

$$\mathbf{P}(\text{spanyol párharc}) = \frac{3 \cdot 8 \cdot 6!}{8!} = \frac{3}{7}.$$

19. Egy halastóban M aranyhal és K ezüsthal van. Egy horgász addig fogja ki egyesével a halakat, amíg már csak egyszínű hal marad a tóban (tehát vagy csupa aranyhal, vagy csupa ezüsthal). Mennyi a valószínűsége, hogy a Gyuri nevű ezüsthal megússza a horgászkalandot?

Megoldás. Ez egy kicsit nehezebb feladat. Könnyen belefuthatunk egy olyan összeszámlálási feladatba, amit nehéz megoldani.

Képzeljük el, hogy a halakat véletlenszerűen megszámozzuk 1-től $(M + K)$-ig, és a sorszám azt jelöli, hogy a horgász hanyadiknak horgászná ki az adott halat. Nem húzza ki mindet, az utolsó néhány sorszámú hal megússza, de az a véletlentől függ, hogy hányan. Azt kell észrevenni, hogy Gyuri pontosan akkor ússza meg, ha az ő sorszáma nagyobb, mint az utolsó aranyhal sorszáma. Tehát csak arra kell figyelni, hogy az M aranyhalhoz képest Gyuri sorszáma hol van. Tehát Gyuri pontosan akkor ússza meg, ha $M + 1$ hal közül ő az utolsó, aminek a valószínűsége

$$\frac{1}{M+1}.$$