A sztochasztika alapjai

10. feladatsor: nevezetes eloszlások

1. A Texpo áruházakban az i-edik kasszánál egy vásárló percben számolva i paraméterű exponenciális időt tölt el. A kiszolgálási idők az egyes kasszáknál egymástól függetlenek.

a) • András éppen üresen találja az 1-es kasszát. Mennyi a valószínűsége, hogy 2 percen belül végez?

b) • Andrással pontosan egyidőben Béla beáll az ugyancsak üres 2-es kasszához. Mennyi a valószínűsége, hogy mindketten 2 percen belül végeznek? Mennyi a valószínűsége, hogy Béla 2 percen belül végez, de András nem?

c) • Mennyi a valószínűsége, hogy valamelyikük 2 percen belül végez? Határozzuk meg a hamarabb végző kiszolgálási idejének eloszlásást! Tehát András és Béla kiszolgálási idejének a minimumára vagyunk kíváncsiak.

d) • Mennyi a valószínűsége, hogy András végez hamarabb?

emlékeztető:

$X \sim Exp(\lambda)$

X folytonos v.v.

sfgv.: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $x > 0$

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $x > 0$

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$

a) $\lambda = 1$. X: András kiszolgálási ideje

$$X \sim Exp(1)$$

$$\{\text{András 2 percen belül végez}\} = \{X \leq 2\}$$

$$P(X \leq 2) = F_X(2) = 1 - e^{-2}$$

b) X: András, Y: Béla kiszolgálási ideje

$X \sim Exp(1)$, $Y \sim Exp(2)$

X, Y függetlenek

$$\{\text{mindketten 2 percen belül végeznek}\} = \{X \leq 2, Y \leq 2\}$$

$$P(X \leq 2, Y \leq 2) = P(X \leq 2) \cdot P(Y \leq 2) =$$

fgt.!!

$$= F_X(2) \cdot F_Y(2) = (1 - e^{-2})(1 - e^{-4})$$

$\{$Béla 2 percen belül, András nem 2 percen belül$\} =$

$= \{X > 2,\ Y \leq 2\}$

$P(X > 2,\ Y \leq 2) = P(X > 2) \cdot P(Y \leq 2) = (1 - F_X(2)) \cdot F_Y(2)$

és, $\cap$ függetlenség! $= e^{-2} \cdot (1 - e^{-4})$.

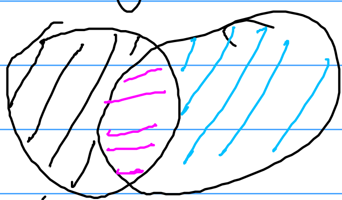
c) $\{$valamelyikük 2 percen belül végez$\} =$

$= \{X \leq 2 \text{ vagy } Y \leq 2\} = \{X \leq 2\} \cup \{Y \leq 2\}$

$P(X \leq 2 \text{ vagy } Y \leq 2) = P(X \leq 2) + P(Y \leq 2) - P(X \leq 2,\ Y \leq 2)$

$[\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\{X \leq 2 \text{ vagy } Y \leq 2\} = \{X \leq 2,\ Y > 2\} \cup \{X > 2,\ Y \leq 2\} \cup \{X \leq 2,\ Y \leq 2\}$



$Y \leq 2$

$X \leq 2$

$$P(X \leq 2 \text{ vagy } Y \leq 2) = P(X \leq 2) + P(Y \leq 2) - P(X \leq 2,\ Y \leq 2)$$
$$= P(X \leq 2) + P(Y \leq 2) - P(X \leq 2) \cdot P(Y \leq 2)$$
$$= 1 - e^{-2} + 1 - e^{-4} - (1 - e^{-2})(1 - e^{-4})$$
$$= 1 - e^{-6}$$

Hamarabb végző kiszolgálási idejének eloszlása

$\min(X, Y) = Z$ ← hamarabb végző ideje

Cél: $P(Z \leq z)$ meghatározása $z \in \mathbb{R}$ esetén

$z \leq 0 \Rightarrow P(Z \leq z) = 0$

$z > 0: P(Z \leq z) = P(\min(X, Y) \leq z)$

← pont ezt számoltuk ki $z = 2$-re.

$= P(X \leq z \text{ vagy } Y \leq z) =$

$= 1 - P(\min(X, Y) > z) = 1 - P(X > z, Y > z)$ és

$= 1 - P(X > z) P(Y > z)$

ftl. $= 1 - e^{-z \cdot 1} e^{-z \cdot 2} = 1 - e^{-z \cdot 3}$

Azaz:

$$P(Z \leq z) = \begin{cases} 0 & \text{ha } z \leq 0 \\ 1 - e^{-3z} & \text{ha } z \geq 0. \end{cases}$$

azaz $Z \sim Exp(3)$.

Általánosabban:

Beláttuk: X, Y függetlenek és $X \sim Exp(\lambda)$, $Y \sim Exp(\mu)$

akkor $\min(X, Y) \sim Exp(\lambda + \mu)$.

Még általánosabban:
$X_1, X_2, \dots, X_n$ függetlenek $X_i \sim Exp(\lambda_i)$

Ekkor $\min\{X_1, \dots, X_n\} \sim Exp(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$

Sztochasztikus modellek

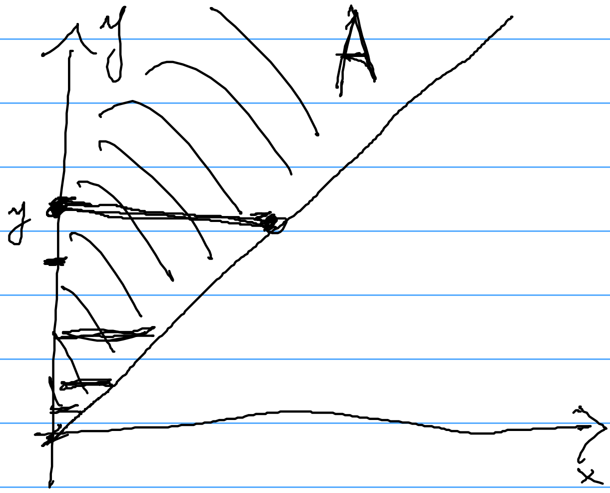
---

d) $\{$András végez hamarabb$\} = \{X < Y\}$

$$P(X<Y) = P((X,Y) \in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

(X,Y) sűrűségfüggvény: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) =$
X, Y független
$$= e^{-x} 2 e^{-2y}$$

$$A = \{(x,y) : x < y\}$$



$$= \int_0^\infty \left(\int_0^y 2 e^{-x} e^{-2y}\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^\infty 2e^{-2y}(1-e^{-y})\,dy = 2\int_0^\infty e^{-2y}\,dy - \int_0^\infty e^{-3y}\,dy$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

2. Bergengóciában engedélyezték a gyorsan terjedő Covarπ vírus elleni új oltóanyagot. A lakosság egy része bizalmatlan az oltással szemben, és az előzetes felmérések szerint a bergengócok 30%-a nem oltatja be magát (azaz ekkora a valószínűsége, hogy egy bergengóc nem oltatja be magát). Legalább mennyi oltást rendeljen egy 2100 lakosú falu háziorvosa, hogy 99%-os valószínűséggel mindenkinek jusson oltóanyag?

S : azoknak a száma akik kérik az oltást

$S \sim \text{Binomiális}(2100, 0{,}7)$ $\qquad n = 2100$, $p = 0{,}7$

Rendeljünk k oltóanyagot.

$\{\text{mindenkinek jut oltóanyag}\} = \{S \leq k\}$

$P(S \leq k) = 0{,}99$

keressük a legkisebb ilyen k-t.

$$P(S \leq k) = P\left(\frac{S - 1470}{21} \leq \frac{k - 1470}{21}\right) \approx \Phi\left(\frac{k-1470}{21}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} np &= 2100 \cdot 0{,}7 = 1470 \\ \sqrt{np(1-p)} &= \sqrt{2100 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3} \\ &= \sqrt{21 \cdot 21} = 21 \end{aligned}}$$

de Moivre–Laplace Tétel (CHT)

$$P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \Phi(x)$$

$$\Phi\left(\frac{k-1470}{21}\right) = 0{,}99$$

$$\frac{k - 1470}{21} = 2{,}33$$

$y = 1470 + 2{,}33 \cdot 21 \approx \underline{1520}$

Legalább $\underline{1520}$ db oltóanyagot kell rendelni.

3. Chicago és Los Angeles között két vasútvonal van, melyek mindegyikén egy-egy vonat közlekedik. Mindkét vonat egyidőben indul, lényegében egyformán kényelmes és k személyes. Tegyük fel, hogy 1000 utas egymástól függetlenül $1/2 - 1/2$ valószínűséggel választ vonatot. Legalább mekkora legyen az ülőhelyek k száma, hogy 0,01-nél kisebb legyen annak a valószínűsége, hogy lesz olyan utas, akinek nem jut ülőhely?

A vonat — B vonat

S : A vonattal utazók

$S \sim$ Binomiális $\left(1000, \frac{1}{2}\right)$

{valakinek nem jut ülőhely} $= \{S > k\} \cup \{1000 - S > k\}$

„A vonaton nincs elég hely"

B-vel utazók száma $= 1000 - S$

$= \{S > k\} \cup \{S < 1000 - k\}$

diszjunktak hiszen $k > 500$

$P(S > k$ vagy $S < 1000 - k) \leq 0{,}01$

$\parallel$

$P(S > k) + P(S < 1000 - k)$

$$P(S > k) = P\left(\frac{S-500}{\sqrt{250}} > \frac{k-500}{\sqrt{250}}\right)$$

$$\frac{S-np}{\sqrt{np(1-p)}} \qquad \overset{\text{de M-L}}{\approx} 1-\Phi\left(\frac{k-500}{\sqrt{250}}\right)$$

$np = 500$

$\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{250}$

$$P(S < 1000-k) = P\left(\frac{S-500}{\sqrt{250}} < \frac{500-k}{\sqrt{250}}\right)$$

$$\approx \Phi\Big(\underbrace{\frac{500-k}{\sqrt{250}}}_{<0}\Big) = 1-\Phi\left(\frac{k-500}{\sqrt{250}}\right)$$

$$\Phi(-x) = 1-\Phi(x)$$

Tehát: $P(\text{valakinek nem jut hely}) \approx$

$$\approx 2\cdot\left(1-\Phi\left(\frac{k-500}{\sqrt{250}}\right)\right) \leq 0{,}01$$

$$\Phi\left(\frac{k-500}{\sqrt{250}}\right) \geq 0{,}995$$

$$\frac{k-500}{\sqrt{250}} \geq 2{,}57$$

$$k \geq 500 + 2{,}57\cdot\underbrace{\sqrt{250}}_{\approx 16} \approx 540$$

4. Magyarországon, és mindenütt a világon, több fiúgyermek születik, mint lány. Az újszülöttek 52%-a fiú, 48%-a lány. Nevezzük *lányos napoknak/heteknek* azokat a napokat/heteket, amikor több lány születik, mint fiú.

a) • Szegeden naponta 9 gyermek születik. Mennyi a pontos valószínűsége, hogy Szegeden egy adott nap lányos nap? Milyen eloszlású az egy héten bekövetkezett lányos napok száma? Várhatóan hány lányos nap van egy héten?

b) • Budapesten naponta 100 gyermek születik. Mennyi a közelítő (normális közelítés, de Moivre–Laplace-tétel) valószínűsége, hogy Budapesten egy adott nap lányos nap?

c) • Egész Magyarországon egy héten 2500 gyermek születik. Mennyi a lányos hét bekövetkezésének közelítő valószínűsége? Várhatóan hány lányos hét lesz 2020-ban? Adjuk meg annak a közelítő valószínűségét (Poisson-közelítés), hogy legalább 3 lányos hét lesz 2020-ban.

a) X_{Sz}: egy napon Szegeden a lányok száma

$$X_{Sz} \sim \text{Binomiális}(9,\ 0{,}48)$$

$$\{\text{egy adott nap lányos nap}\} = \{X \geq 5\}$$

$$P(X \geq 5) = P(X=5) + P(X=6) + \dots + P(X=9) = 0{,}45$$

$$P(X=k) = \binom{9}{k} 0{,}48^k \cdot 0{,}52^{9-k}$$

$$P(X \geq 5) = 0{,}45$$

Egy héten a lányos napok száma: Y

$$Y \sim \text{Binomiális}(7,\ 0{,}45)$$

$$E(Y) = 7 \cdot 0{,}45 = 3{,}15$$

b) Budapest

$$X_B \sim \text{Binomiális}(100, 0{,}48)$$

$$\{\text{Bp-en lányos nap}\} = \{X_B \geq 51\}$$

$$P(X_B \geq 51) = P\left(\frac{X_B - 100 \cdot 0{,}48}{\sqrt{100 \cdot 0{,}48 \cdot 0{,}52}} \geq \frac{51 - 100 \cdot 0{,}48}{\sqrt{100 \cdot 0{,}48 \cdot 0{,}52}}\right)$$

$$\underset{\text{deM-L}}{\approx} 1 - \Phi\left(\frac{3}{5}\right) \approx 0{,}27$$

c) Mo-n egy hét: $2500 = n$

X_M: egy héten Mo-n lányok $\sim$ Binomiális$(2500, 0{,}48)$

$$P(X_M > 1250) = P\left(\frac{X_M - 1200}{25} > \frac{1250 - 1200}{25}\right) \underset{\text{deM-L}}{\approx} 1 - \Phi(2) = 0{,}023$$

$np = 2500 \cdot 0{,}48 = 1200$

$\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{2500 \cdot 0{,}48 \cdot 0{,}52} = 25$

Y_M ||

$P(\text{lányos hét Mo}) = 0{,}023$ } Binomiális$(52, 0{,}023)$

egy évben: 52 hét

$\Downarrow$

Poisson$(52 \cdot 0{,}023)$

$E(\text{lányos hetek egy évben}) = 52 \cdot 0{,}023$

$$P(Y_M \geq 3) = 1 - (P(Y_M = 0) + P(Y_M = 1) + P(Y_M = 2))$$

$$= 1 - \left[\frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \right]$$

$$\boxed{\lambda = 52 \cdot 0{,}023}$$

5. Budapesten meg akarják állapítani a dohányosok p arányát. Ehhez kiválasztanak n egyént úgy, hogy minden választásnál mindenki ugyanakkora valószínűséggel kerül kiválasztásra, és csak ezek közt nézik meg a dohányosok k számát. Legalább mekkora legyen az n, hogy a kapott $p' = k/n$ arány legalább 0,95 valószínűséggel legfeljebb 0,005 hibával közelítse a valódi p arányt, akármi is $p \in (0,1)$?