Pénzügyi matematika

Házi feladatok II.

Határidő: 2020. október 5.

4. Legyenek $X, X_1, X_2, \dots$ független vv-k, $\mathbf{E}X_n = 0$, $\mathbf{E}X_n^2 = \sigma_n^2 < \infty$. Mutassuk meg, hogy $S_n^2 = (X_1 + \cdots + X_n)^2$ szubmartingál, és adjuk meg a Doob-felbontását. (Ha nem szerepel filtráció, akkor mindig a természetes filtrációra vonatkozik az állítás.)

5. Legyen $Y \in \{a, b\}$ és

$$\mathbf{P}(Y = a|\mathcal{F}) = p \text{ m.b.}$$

Igazoljuk, hogy Y független $\mathcal{F}$-től!

6. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező, rajta $(\mathcal{F}_n)_{n=0,1,\dots,N}$ filtráció. Legyen $\mathrm{d}\mathbf{Q} = Z\mathrm{d}\mathbf{P}$, ahol $Z \geq 0$ és $\mathbf{E_P}Z = 1$, és $Z_n = \mathbf{E_P}[Z|\mathcal{F}_n]$.

Legyen (X_n) adaptált folyamat. Igazoljuk, hogy (X_n) pontosan akkor $\mathbf{Q}$-martingál, ha $(X_n Z_n)$ $\mathbf{P}$-martingál!

7. Általános egylépéses piac. Legyen ρ egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon, ahol $a < r < b$. Igazoljuk, hogy a gyenge konvergencia tulajdonság teljesül! Adjunk meg egy konkrét P_n sorozatot!

Hogyan lehetne gyengíteni a ρ eloszlására tett feltételt, hogy a gyenge konvergencia tulajdonság teljesüljön?