

Valószínűségszámítás

2. feladatsor: Szita formula, kombinatorikus és geometriai valószínűség, vegyes

1. Egy vendéglőben az egyik asztalnál 9 vendég ül. Négyen kólát, hárman sört rendeltek, ketten pedig ásványvizet rendeltek. A kissé feledékeny pincér emlékszik, hogy miből mennyit rendeltek, de azt már elfelejtette, hogy ki mit kért. Ezért véletlenszerűen osztja ki az italokat. Mekkora a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja, amit rendelt?

2. Egy embernek n egyforma kinézetű kulcsa van, melyek közül pontosan egy nyitja az ajtót. Emberünk véletlenül választva sorra próbálja a kulcsokat addig, amíg a jó kulcs elő nem kerül. Valamely $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén mennyi a valószínűsége, hogy a k -adik próbálkozása sikeres, ha

- (a) a kipróbált rossz kulcsokat mindig félreteszi?
- (b) a kipróbált rossz kulcsokat sose teszi félre?

3. Mekkora a valószínűsége, hogy az ötöslottón kihúzott számok között nem lesznek egymást követők?

4. Egy pénzügyi befektető cég három cégbe fekteti pénzét, melyek rendre 0,19, 0,25, illetve 0,28 valószínűséggel mennek csődbe az elkövetkező öt évben. Annak a valószínűsége, hogy az első és a második cég is csődbe megy 0,05, hogy az első és a harmadik is csődbe megy 0,1, míg hogy a második és a harmadik is becsődöl annak is 0,1. Annak az esélye, hogy mindhárom cég becsődöl 2%. Mennyi a valószínűsége, hogy

- (a) az első vagy a második cég csődbe megy?
- (b) egyik cég sem megy csődbe?

5. A Jonas Brothers nevű együttes újra összeáll és koncertet adnak. A PepsiCo cég a következő ötlettel áll elő: a kólásüvegek kupakjában elrejtik a banda egy-egy tagjának a nevét és azok között, akik összegyűjtik mindhárom nevet kisorsolnak egy VIP belépőt. Kevin neve a kupakok felén szerepel, Joe-val a kupakok egyharmadában találkozhatunk és Nick a legritkább, neve átlagosan minden hatodik kupakban szerepel. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 kólát vásárolva sikerül kigyűjtenünk a három testvért? (Segítség: a kupakokra gondoljunk úgy mintha egy zsákból húznánk egy nevet, melyben Kevin háromszor, Joe kétszer, Nick pedig egyszer szerepel.)

6. Sorban elhelyezett n dobozba találmra berakunk N golyót úgy, hogy az összes elhelyezés egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy az első k doboz egyike sem üres?

7. Egy urnában k -féle színű golyó van, mindegyik színűből ugyanannyi darab. Egyenként húzunk a golyókból úgy, hogy minden húzás után visszatesszük a kihúzott golyót, és minden húzásnál bármelyik golyó ugyanolyan valószínűséggel kerülhet kihúzásra.

- (a) Mennyi annak a q_n valószínűsége, hogy legalább n húzás kellett ahhoz, hogy minden szín előforduljon?
- (b) Mennyi annak a p_n valószínűsége, hogy n húzás során minden szín előfordult, és ez az n -edik húzásnál következik be először (vagyis az első $(n-1)$ húzás során csak $(k-1)$ szín fordult elő) ?

8. Egy kockát addig dobunk, amíg mind a 6 szám elő nem fordul. Legyen p_n annak a valószínűsége, hogy ez először az n -edik dobásra következik be. Határozzuk meg p_n -et!
9. A Faluvégi Kurta Kocsma előtt 5 bicikli áll. Záróra előtt egymás után jön ki az 5 tulajdonos, és mindegyikük véletlenszerűen választ egy kerékpárt. Mennyi a valószínűsége, hogy senki sem a saját biciklijén jutott haza?
10. A $[0, 1]$ intervallumot felosztjuk két véletlenül rádobott ponttal három részre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy
- mindhárom szakasz hossza nagyobb, mint $1/4$?
 - mindhárom szakasz hossza kisebb mint $1/2$?
 - a szakaszokból háromszög szerkeszthető?
 - a szakaszokból hegyesszögű háromszög szerkeszthető?
11. Választunk egy véletlen számot 0 és 2 között, és egy másikat ettől függetlenül 1 és 2 között. Mennyi a valószínűsége, hogy az összegük kisebb, mint 2?
12. Válasszuk az X, Y pontokat egymástól függetlenül a $(0, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy az $x^2 + Xx + Y = 0$ egyenletnek valós gyökei lesznek?
13. András és Betti munkaideje egymástól függetlenül egy-egy du. 4 és 6 közötti egyenletes eloszlású időpontban ér véget. Munkaidejük végeztével mindketten elmennek egy, munkahelyüktől azonos távolságra levő kávézóba, ahol elfogyasztanak egy csésze kávé. András esetében ez 10 perc, Betti esetében 20. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak?
14. Anna és Szabina minden szerdán fodrászhoz mennek. Anna 2 és 3 óra között, Szabina pedig 2 és fél 3 között végez egy véletlenszerű időpontban, egymástól függetlenül. Egymást megvárják, majd együtt indulnak haza. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon negyed 3 után indulnak haza? Mennyi ez a valószínűség, ha tudjuk, hogy Anna legalább 10 perccel korábban végzett, mint Szabina?
15. Tekintsünk egy egységnyi területű kört, és ennek egy rögzített pontját. Válasszunk további két pontot a körvonalon egymástól függetlenül egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy a három pont által meghatározott háromszög fedi a kör középpontját?
16. Egy egységnégyzet két szemközti oldalán véletlenül választunk egy-egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy távolságuk négyzete kisebb, mint $3/2$?
17. Egy kör területén egymástól függetlenül, egyenletesen választunk 4 pontot: A, B, C, D . Mennyi a valószínűsége, hogy az AB és CD húrok metszik egymást?
18. Egy négyzet belsejében egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a választott pont közelebb van valamelyik oldalhoz, mint $1/4$?
19. Egy kör területén válasszunk n pontot egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pontok konvex burka tartalmazza a kör középpontját? Mennyi ez a valószínűség, ha a pontokat a kör belsejében választjuk függetlenül, egyenletes eloszlás szerint?