

A sztochasztika alapjai fizikusoknak
5. feladatsor: kovariancia, nevezetes eloszlások

1. Egy vállalat egy hónapra eső profitja a havi teljes bevétel és a havi teljes kiadás különbségként áll elő, ahol a bevétel és a kiadás is valószínűségi változó. A bevétel várható értéke 120 millió forint 30 millió forint szórással, míg a kiadás várható értéke 80 millió forint 20 millió forint szórással. Határozzuk meg az egy hónapra jutó profit várható értékét és szórását akkor, ha a bevétel és a kiadás független, illetve akkor, ha a közöttük lévő korrelációs együttható 0,8. A korreláció függvényében írjuk fel formulával és ábrázoljuk grafikonon a profit várható értékét és varianciáját.

2. A megtakarított pénzünket értékpapírba fektetjük, 20 darabot vásárolunk az A vállalat és 10 darabot a B vállalat részvényeiből. Egy év múlva a két vállalat részvényei várható értékben 700 illetve 1500 dollárt fognak majd érni, az árfolyamok szórása pedig 20 illetve 80 dollár.

- (a) Tegyük fel, hogy a részvények árfolyama független egymástól. Várhatóan mennyit fog majd érni a portfóliónk egy év múlva? Mennyi a portfólió értékének a szórása?
- (b) Tegyük fel, hogy a részvények árfolyama nem független egymástól. Az árfolyamok közötti korrelációs együttható függvényében írjuk fel formulával és ábrázoljuk a portfólió értékének várható értékét és varianciáját!
- (c) Milyen kapcsolat van a korrelációs együttható és a befektetés kockázata között? Ha én egy kockázatkerülő befektető vagyok, akkor pozitív vagy negatív korrelációjú értékpapírokból állítsak össze portfóliót?

3. A Real Madrid 2018/2019-es idényben az egy mérkőzésen lőtt góljainak száma Poisson-eloszlást követ $\lambda = 3$ paraméterrel, míg a kapott gólok száma Poisson-eloszlást követ $\mu = 0,7$ paraméterrel. Adjuk meg a Real Madrid egy mérkőzésén esett összes gól számának várható értékét és szórásnégyzetét abban az esetben ha

- (a) a lőtt és kapott gólok száma függetlenek;
- (b) a lőtt és kapott gólok számának korrelációs együtthatója 0,4.

4. Egy könyvben az egyes oldalakon a sajtóhubák száma egymástól független, Poisson(2) eloszlást követ. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a 30. és 31. oldalon sincs hiba! Adjuk meg az ezeken az oldalakon található sajtóhubák várható értékét és szórását!

5. Egy augusztusi éjszakán megfigyelhető csillaghullások száma Poisson-eloszlást követ. Annak a valószínűsége, hogy egy éjszaka egyetlen hullócsillagot sem látunk 0,1. Várhatóan hány hullócsillag figyelhető meg egy éjszaka?

6. Egy biztosítótársaság felmérte, hogy egy év során egy családi ház 0,0002 valószínűséggel gyullad ki. Mennyi a valószínűsége, hogy 2008-ban egy faluban, ahol 15000 ház van, négynél kevesebb tűz üt ki? (Közelítsünk Poisson-eloszlással!)

7. Egy szövet 100 méterében átlagosan 5 hiba van. Három méteres darabokra vágunk 300 m hosszú szövetet. Várhatóan hány hibátlan darab lesz?
8. Egy villanykörte élettartama exponenciális eloszlású, átlagosan 2 évig működik. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy évig fog működni egy új villanykörte? Mennyi a valószínűsége, hogy legalább még egy évig fog működni egy már fél éve működő? Mennyi időt él meg a villanykörték 90%-a?
9. Anna 30-ik születésnapjára azt a 6 darabos pohárkészletet kapja nagymamájától, mely már 100 éve a család tulajdona. A poharak élettartamai egymástól függetlenek, exponenciális eloszlást követnek 50 év várható értékkel. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy 50 év múlva Anna sértetlenül adhatja tovább unokájának a családi ereklyét (azaz mind a hat poharat)!
10. Egy telefonfülke előtt állunk, és várjuk, hogy az előttünk beszélő befejezze a beszélgetést. Az illető véletlentől függő ideig beszél, az időtartam sűrűségfüggvénye (percben mérve) $e^{-(x/3)}/3$, $x > 0$.
- Mennyi a valószínűsége, hogy a beszélgetés 3 percnél tovább tart?
 - Mennyi a valószínűsége, hogy a beszélgetés $t + 3$ percnél tovább tart, feltéve, hogy t percnél tovább tart?
11. A skót bakák mellkasának körmérete $N(88, 10)$ eloszlást követ. Mekkora hányaduk fér bele 84-es zubbonyba?
12. Egy munkadarabokat készítő gép 40 cm-re van beállítva. A hiba normális eloszlást követ 0 várható értékkel. Annak a valószínűsége, hogy egy munkadarab nagyobb, mint 40,5 cm, 0,05. Mennyi a szórás?
13. Tegyük fel, hogy Ausztriában a munkavállalók keresete normális eloszlást követ. Tudjuk, hogy a munkavállalók fele keres havi 3000 eurót vagy kevesebbet, míg 5%-uk keres 8000 eurónál többet. Egy törvénytervezet szerint változna az adókulcs az 5000 eurónál többet keresők számára. A munkavállalók mekkora hányadát érinti ez a változtatás?
14. A házimacskák testsúlya jó közelítéssel normális eloszlást követ. A macskák 10%-a könnyebb, mint 1,5 kg, és 20%-a nehezebb, mint 7 kg. Mekkora a 6 kg-nál nehezebb macskák aránya?
15. Egy szabályos dobókockát feldobunk 200-szor. Jelölje S_n a dobott hatosok számát. Adjuk meg pontosan, majd a de Moivre–Laplace tétellel közelítve a $\mathbf{P}(30 < S_n \leq 40)$ valószínűséget!
16. Az FC Barcelona passzolási hatékonysága 2019. áprilisában $p = 0.85$ (azaz egy passz ekkora valószínűséggel sikeres). Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy a Liverpool elleni 525 passzból legalább 460 sikeres.

17. Egy étteremben kétféle menü közül lehet választani. A vendégek $5/6$ valószínűséggel A menüt, $1/6$ valószínűséggel B menüt választanak. Egy adott napon 500 vendég érkezik. A vendéglős 420 A és 100 B menüt készített elő. Feltételezve, hogy a vendégek egymástól függetlenül választanak, mi a valószínűsége, hogy mindenkinek jut olyan menü, amelyet kér?

18. Chicago és Los Angeles között két vasútvonal van, melyek mindegyikén egy-egy vonat közlekedik. Mindkét vonat egyidőben indul, lényegében egyformán kényelmes és k személyes. Tegyük fel, hogy 1000 utas egymástól függetlenül $1/2 - 1/2$ valószínűséggel választ vonatot. Legalább mekkora legyen az ülőhelyek k száma, hogy 0,01-nél kisebb legyen annak a valószínűsége, hogy lesz olyan utas, akinek nem jut ülőhely?

19. Az utóbbi években felmerült a mozilátogatókban az igény arra, hogy eredeti hanggal feliratos is megnézhessek a filmeket. Egy friss felmérés szerint az emberek $2/7$ -e választaná a feliratos filmet a szinkronizált változattal szemben. A szegedi Cinema City vezetősége minket kért fel arra, hogy segítsünk dönteni Christopher Nolan The Dark Knight Rises című filmjének premierje kapcsán. A premierre 1000 látogatót várnak, és a filmet 9 egyenként 130 fős teremben vetítik. Hány teremben kell feliratosan vetíteni a filmet, hogy a lehető legnagyobb valószínűséggel tudjon minden látogató arra a változatra beülni, amire szeretne? Mekkora ez a valószínűség?

20. Egy általános iskolában egy és két forintosok gyűjtését hirdetik meg a pénzermék bevonása előtti fél évben. Megkérjük az oda járó diákokat és szüleiket, hogy az otthoni felesleges apórópénzüket az iskolának adják, hogy az így befolyt összegből játszótér építhessenek az iskolaudvaron. A játszótér megépítéséhez 1,5 millió Ft-ra van szükségük. A gyűjtés során egymillió darab pénzermét adományoztak az iskolának. Ha ezen pénzermék mindegyike a többitől függetlenül $1/2 - 1/2$ valószínűséggel egy illetve két forintos, akkor mennyi a közelítő valószínűsége, hogy az igazgatónak legfeljebb 1000 Ft-tal kell hozzájárulnia a játszótér megépüléséhez?

21. Budapesten meg akarják állapítani a dohányosok p arányát. Ehhez kiválasztanak n egyént úgy, hogy minden választásnál mindenki ugyanakkora valószínűséggel kerül kiválasztásra, és csak ezek közt nézik meg a dohányosok k számát. Legalább mekkora legyen az n , hogy a kapott $p' = k/n$ arány legalább 0,95 valószínűséggel legfeljebb 0,005 hibával közelítse a valódi p arányt, akármi is $p \in (0, 1)$?

22. Mutassuk meg, hogy két független Poisson-eloszlású véletlen változó összege is Poisson-eloszlású!

23. Valamely növényfajta magjaiból álló mintában a hibás magok száma λ paraméterű Poisson-eloszlású véletlen változó. Minden mintát 3 technikus vizsgál meg egymás után, hogy eltávolítsák a hibás magokat. Az i -edik technikus $p_i < 1$ valószínűséggel veszi észre a hibás magokat; döntései az egyes magokra nézve függetlenek, és az egyes technikusok is egymástól függetlenül döntenek. Határozzuk meg az el nem távolított hibás magok eloszlását!