A sztochasztika alapjai fizikusoknak

2. feladatsor: valószínűségek kombinatorikus kiszámítása, geometriai valószínűség

1. Az iskolai karácsonyi vásárra készülődve Blanka, Csenge és Dóri feladata az volt, hogy különböző figurákat hajtogassanak színes papírból. Összesen 70 figurát hajtogattak. A figurák kétheted részét Dóri készítette, a maradékot pedig fele-fele arányban Blanka és Csenge. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a 70 figura közül véletlenszerűen kiválasztott két figurát ugyanaz a lány készített!

2. Egy vendéglőben az egyik asztalnál 9 vendég ül. Négyen kólát, hárman sört rendeltek, ketten pedig ásványvizet rendeltek. A kissé feledékeny pincér emlékszik, hogy miből mennyit rendeltek, de azt már elfelejtette, hogy ki mit kért. Ezért véletlenszerűen osztja ki az italokat. Mekkora a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja, amit rendelt?

3. Egy embernek n egyforma kinézetű kulcsa van, melyek közül pontosan egy nyitja az ajtót. Emberünk véletlenül választva sorra próbálja a kulcsokat addig, amíg a jó kulcs elő nem kerül. Mennyi a valószínűsége, hogy a k-adik próbálkozása sikeres, ha

(a) a kipróbált rossz kulcsokat mindig félreteszi?

(b) a kipróbált rossz kulcsokat sose teszi félre?

4. Egy sakktáblán találomra elhelyezünk 8 bástyát. Mi a valószínűsége, hogy egyik sem üti a másikat?

5. Egy kertész három juhar-, négy tölgy- és öt nyírfát ültetett egy sorba véletlen sorrendben, mindegyik fát egyenlő valószínűséggel választva. Mennyi annak a valószínűsége, hogy nem kerül egymás mellé két nyír?

6. A Bajnokok Ligájában 2017-ben három spanyol csapat jutott a 8 közé: az Atlético Madrid, a Barcelona és a Real Madrid. Sorsolással határozták meg a negyeddöntők párosítását (itt már nincs kiemelés, és azonos nemzet csapatai is összekerülhetnek). Mennyi volt a sorsolás előtt a valószínűsége annak, hogy a negyeddöntőben

(a) Barcelona – Real Madrid párharc lesz?

(b) lesz spanyol párharc?

7. Egyes vidékeken elterjedt a következő babona: egy lány 6 fűszálat fog a markába úgy, hogy azok a kezéből mindkét irányban kiállnak. Egy másik lány mindkét oldalon páronként összecsomózza a fűszálakat. Ha így egy zárt lánc keletkezik, akkor arra következtetnek, hogy a lány a következő évben férjhez megy. Ha a csomózás teljesen véletlenszerűen történik, mennyi a valószínűsége, hogy zárt láncot kapunk. Mi a helyzet $2n$ fűszál esetén?

8. Máté nagymamája meggylevest készít a vasárnapi ebédhez. Összesen 5 szem szegfűszeget tesz a levesbe. A levest 4 egyforma adagra osztják. Mennyi a valószínűsége, hogy Máté levesében nem lesz szegfűszeg? Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 3 szegfűszeg lesz a levesében?

9. Egy unatkozó gyakorlatvezető dolgozatiratás során arra lett figyelmes, hogy a csoportjában az összes lány egy sorban ül. A csoportban 10 hallgató van, közülük 3 lány. A teremben 4 sor van és minden sorban 4 hely, és feltesszük, hogy mindenki véletlenszerűen választ helyet, azaz minden leülési konfiguráció egyforma valószínűségű. Mennyi a kérdéses esemény valószínűsége?

10. Egy halastóban M aranyhal és K ezüsthal van. Egy horgász addig fogja ki egyesével a halakat, amíg már csak egyszínű hal marad a tóban (tehát vagy csupa aranyhal, vagy csupa ezüsthal). Mennyi a valószínűsége, hogy a Gyuri nevű ezüsthal megússza a horgászkalandot?

11. Egy $n \times n$-es négyzetrács bal alsó és jobb felső sarkába leteszünk egy-egy pókot. A pókok $2n$ lépésben helyet cserélnek úgy, hogy egymástól függetlenül minden útvonalat ugyanakkora valószínűséggel választanak. A pókok egyszerre indulnak, és minden másodpercben egy lépést tesznek. Mi a valószínűsége, hogy a két pók találkozik?

12. A Boltzmann–Maxwell-statisztikánál r golyót úgy helyezünk el n dobozba, hogy mind az n^r elhelyezés egyformán valószínű. Határozzuk meg annak a p_k valószínűségét, hogy pontosan k golyó kerül az első dobozba! Számítsuk ki ezt a határértéket, ha $n \to \infty$ úgy, hogy $r/n \to \lambda$!

13. A $[0, 1]$ intervallumot felosztjuk két véletlenül rádobott ponttal három részre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

(a) mindhárom szakasz hossza nagyobb, mint $1/4$?

(b) mindhárom szakasz hossza kisebb mint $1/2$?

(c) a szakaszokból háromszög szerkeszthető?

(d) a szakaszokból hegyesszögű háromszög szerkeszthető?

14. Választunk egy véletlen számot 0 és 2 között, és egy másikat ettől függetlenül 1 és 2 között. Mennyi a valószínűsége, hogy az összegük kisebb, mint 2?

15. Válasszuk az X, Y pontokat egymástól függetlenül a $(0, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy az $x^2 + Xx + Y = 0$ egyenletnek valós gyökei lesznek?

16. András és Betti munkaideje egymástól függetlenül egy-egy du. 4 és 6 közötti egyenletes eloszlású időpontban ér véget. Munkaidejük végeztével mindketten elmennek egy, munkahelyüktől azonos távolságra levő kávézóba, ahol elfogyasztanak egy csésze kávét. András esetében ez 10 perc, Betti esetében 20. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak?

17. Egy kör kerületén egymástól függetlenül, egyenletesen választunk 4 pontot: A, B, C, D. Mennyi a valószínűsége, hogy az AB és CD húrok metszik egymást?

18. Tekintsünk egy egységnyi kerületű kört, és ennek egy rögzített pontját. Válasszunk további két pontot a körvonalon egymástól függetlenül egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy a három pont által meghatározott háromszög fedi a kör középpontját?

19. Egy kör kerületén válasszunk n pontot egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pontok konvex burka tartalmazza a kör középpontját?

20. Egy egységnégyzet két szemközti oldalán véletlenül választunk egy-egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy távolságuk négyzete kisebb, mint $3/2$?