

## A sztochasztika alapjai fizikusoknak

### 1. feladatsor: valószínűségi mező, események, szita formula

1. Egy szabályos dobókockával egyszer dobunk. Adjuk meg a kísérletet leíró valószínűségi mezőt! Adjuk meg azt az eseményt és annak valószínűségét, hogy (i) páros számot dobunk; (ii) prímet dobunk; (iii) hatost dobunk!

2. Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk. Adjuk meg a kísérletet leíró valószínűségi mezőt! Adjuk meg azt az eseményt és annak valószínűségét, hogy (i) két hatost dobunk; (ii) dobunk hatost; (iii) mindkétszer páratlan számot dobunk!

3. Három kockával dobva mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 4? Adjuk meg a kísérletet leíró valószínűségi mezőt!

4. Egy szabályos érmét tízszer feldobunk. Adjuk meg a kísérlet egy matematikai modelljét! Adjuk meg azt az eseményt és annak valószínűségét, hogy (i) nem dobunk fejet; (ii) az első dobás fej; (iii) pontosan 5 fejet dobunk!

Oldjuk meg a feladatot, ha az érme cinkelt, és a fejdobás valószínűsége  $p$ !

5. Adjuk meg a lottóhúzást leíró valószínűségi mezőt! Mennyi annak a valószínűsége, hogy pont 3 találatunk lesz? Mennyi a valószínűsége, hogy lesz találatunk?

6. Fejezzük ki az  $A, B, C$  halmazokkal az alábbi eseményeket!

- (a) Az  $A, B, C$  események közül pontosan  $k \in \{1, 2, 3\}$  következik be.
- (b) Az  $A, B, C$  események közül legalább  $k$  következik be.
- (c) Az  $A, B, C$  események közül legfeljebb  $k$  következik be.

7. Igazoljuk az alábbi formulák helyességét!

- (a)  $A \circ B = (A \cup B) - A \cap B$ ;
- (b)  $A \cap (B - C) = A \cap B - A \cap C$ ;
- (c)  $A - (A - (B - C)) = A \cap B \cap C^c$ ;
- (d)  $A \cup B = A \circ B \circ (A \cap B)$ .

8. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $A_1, A_2, \dots, A_n$  események esetén

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \geq \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \dots + \mathbf{P}(A_n) - (n - 1).$$

9. Egy pénzügyi befektető cég három cégbe fekteti pénzét, melyek rendre 0,19, 0,25, illetve 0,28 valószínűséggel mennek csődbe az elkövetkező öt évben. Annak a valószínűsége, hogy az első és a második cég is csődbe megy 0,05, hogy az első és a harmadik is csődbe megy 0,1, míg hogy a második és a harmadik is becsődöl annak is 0,1. Annak az esélye, hogy mindhárom cég becsődöl 2%. Mennyi a valószínűsége, hogy

- (a) az első vagy a második cég csődbe megy?  
 (b) egyik cég sem megy csődbe?
- 10.** A Faluvégi Kurta Kocsma előtt 5 bicikli áll. Záróra előtt egymás után jön ki az 5 tulajdonos, és mindegyikük véletlenszerűen választ egy kerékpárt. Mennyi a valószínűsége, hogy senki sem a saját biciklijén jutott haza?
- 11.** Egy urnában  $k$ -féle színű golyó van, mindegyik színűből ugyanannyi darab. Egyenként húzunk a golyókból úgy, hogy minden húzás után visszatesszük a kihúzott golyót, és minden húzásnál bármelyik golyó ugyanolyan valószínűséggel kerülhet kihúzásra.
- (a) Mennyi annak a  $q_n$  valószínűsége, hogy legalább  $n$  húzás kellett ahhoz, hogy minden szín előforduljon?  
 (b) Mennyi annak a  $p_n$  valószínűsége, hogy  $n$  húzás során minden szín előfordult, és ez az  $n$ -edik húzásnál következik be először (vagyis az első  $(n - 1)$  húzás során csak  $(k - 1)$  szín fordult elő) ?
- 12.** Egy kockával addig dobunk, amíg mind a 6 szám elő nem fordul. Legyen  $p_n$  annak a valószínűsége, hogy ez először az  $n$ -edik dobás után következik be. Határozzuk meg  $p_n$ -et!
- 13.** Két szabályos kockát  $r$ -szer feldobunk. Legyen  $p_r$  annak a valószínűsége, hogy az  $(1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)$  mindegyike legalább egyszer előfordul. Határozzuk meg  $p_r$ -et!
- 14.** Sorban elhelyezett  $n$  dobozba találmányra berakunk  $N$  golyót úgy, hogy az összes elhelyezés egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy az első  $k$  doboz egyike sem üres?
- 15.** Három kockával dobva mennyi a valószínűsége, hogy 10-nél nagyobb a dobott számok összege? Adjuk meg a kísérletet leíró valószínűségi mezőt!
- 16.** Egy szabályos kockával 11-szer dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az egymást követő 1, 2, 3, 4, 5, 6 eredmény sorozat nem fordul elő?
- 17.** Hét törpe közül Hófehérke leültet ötöt egy kör alakú asztalhoz. Tegyük fel, hogy az összes lehetséges elrendezés egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy Morgó és Kuka nem kerül egymás mellé?
- 18.** Tíz pár cipőből véletlenül kiválasztunk négy darabot. Mekkora a valószínűsége, hogy nem lesz egy pár sem?
- 19.** Száz alma közül tíz férges. Véletlenül kiválasztva ötöt, mi a valószínűsége, hogy lesz közte férges?
- 20.** Mekkora a valószínűsége, hogy az ötöslottón kihúzott számok között nem lesznek egymást követők?