A sztochasztika alapjai

5. feladatsor: együttes eloszlás, kovariancia

1. A megtakarított pénzünket értékpapírba fektetjük, 20 darabot vásárolunk az A vállalat és 10 darabot a B vállalat részvényeiből. Egy év múlva a két vállalat részvényei várható értékben 700 illetve 1500 dollárt fognak majd érni, az árfolyamok szórása pedig 20 illetve 80 dollár.

(a) Tegyük fel, hogy a részvények árfolyama független egymástól. Várhatóan menynyit fog majd érni a portfóliónk egy év múlva? Mennyi a portfólió értékének a szórása?

(b) Tegyük fel, hogy a részvények árfolyama nem független egymástól. Az árfolyamok közötti korrelációs együttható függvényében írjuk fel formulával és ábrázoljuk a portfólió értékének várható értékét és varianciáját!

(c) Milyen kapcsolat van a korrelációs együttható és a befektetés kockázata között? Ha én egy kockázatkerülő befektető vagyok, akkor pozitív vagy negatív korrelációjú értékpapírokból állítsak össze portfóliót?

2. Bence és Luca testvérek. Ebéd után mindketten véletlentől függő ideig alszanak. Bence esetében ez átlagosan 2 óra, a szórás 30 perc, míg Luca esetében 1,5 óra, 20 perc szórással. Határozzuk meg Bence és Luca együttes (Bence + Luca) alvásának várható értékét és szórását, ha az alvásmennyiségek egymástól függetlenek, illetve akkor, ha a közöttük lévő korrelációs együttható 0,5.

3. Két szabályos kockával játszunk. Jelölje X az első kockával dobott számot és Y a dobott számok nagyobbikát. Adjuk meg az együttes eloszlást, kovarianciát, az összeg várható értékét és szórását!

4. Válasszunk két számot egymástól függetlenül az egyenletességi hipotézis szerint a $(0,1)$ intervallumból! Adjuk meg a maximum és a minimum együttes eloszlását, és számoljuk ki a kovarianciájukat!

5. Legyen X és Y együttes sűrűsége h, ahol

(a) $h(x,y) = xe^{-x(1+y)}$, ha $x, y \geq 0$;

(b) $h(x,y) = 6xy^2$, ha $x, y \in [0,1]$;

(c) $h(x,y) = 2xy + x$, ha $x, y \in (0,1)$;

(d) $h(x,y) = (x+y)^2 - (x-y)^2$, ha $x, y \in (0,1)$.

Határozzuk meg a kovarianciamátrixot!

6. A Jonas Brothers nevű együttes újra összeáll és koncertet adnak. A PepsiCo cég a következő ötlettel áll elő: a kólásüvegeik kupakjában elrejtik a banda egy-egy tagjának a nevét és azok között, akik összegyűjtik mindhárom nevet kisorsolnak egy VIP belépőt. Kevin neve a kupakok felén szerepel, Joe-val a kupakok egyharmadában találkozhatunk és Nick a legritkább, neve átlagosan minden hatodik kupakban szerepel. Veszünk 10 kólát. Adjuk meg a Joe feliratú kupakok számának várható értékét és szórását! Adjuk meg a Joe feliratú és a Kevin feliratú kupakok számának kovarianciáját és korrelációs együtthatóját!

7. Legyen az (X, Y) véletlen vektorváltozó eloszlása egyenletes az egységkörben. Határozzuk meg az együttes eloszlásfüggvényt és a peremeloszlások sűrűségfüggvényeit!

8. Legyen az X és Y véletlen változók együttes sűrűségfüggvénye

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x + xy + y), & \text{ha } (x,y) \in (0,1)^2\,, \\ 0, & \text{különben}\,. \end{cases}$$

Határozzuk meg a peremeloszlásokat!

9. Egy dobókockával az első hatosig dobunk. Jelölje X a szükséges dobások számát, Y pedig a dobott egyesek számát. Adjuk meg az együttes eloszlást és a kovarianciát!

10. Mutassuk meg, hogy két független Poisson–eloszlású véletlen változó összege is Poisson–eloszlású!

11. Valamely növényfajta magjaiból álló mintában a hibás magok száma λ paraméterű Poisson–eloszlású véletlen változó. Minden mintát 3 technikus vizsgál meg egymás után, hogy eltávolítsák a hibás magokat. Az i-edik technikus $p_i < 1$ valószínűséggel veszi észre a hibás magokat; döntései az egyes magokra nézve függetlenek, és az egyes technikusok is egymástól függetlenül döntenek. Határozzuk meg az el nem távolított hibás magok eloszlását!

12. Egy szabályos kockával N-szer dobunk, ahol $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ véletlen változó. Jelölje X_1 az egyesek, X_2 a kettesek számát. Adjuk meg az együttes eloszlást!

13. Egy városban 200 taxi közlekedik. Telefonon taxit rendelünk, és ha van szabad taxi, akkor a központ a legközelebbit hozzánk küldi. Feltesszük, hogy a taxik egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint helyezkednek el a városban, és mindegyik egymástól függetlenül $2/3$ valószínűséggel foglalt. Továbbá egy taxi helyzete a városon belül független attól, hogy foglalt-e vagy sem. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a legközelebbi szabad taxi 1 km-es körzetünkben legyen (mely nem nyúlik ki a városból), feltéve, hogy van szabad taxi? A város területe $28,26\,\text{km}^2$.

14. Egy telefonfülke előtt állunk, és várjuk, hogy az előttünk beszélő befejezze a beszélgetést. Az illető véletlentől függő ideig beszél, az időtartam sűrűségfüggvénye (percben mérve) $e^{-(x/3)}/3$, $x > 0$.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy a beszélgetés 3 percnél tovább tart?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy a beszélgetés $t+3$ percnél tovább tart, feltéve, hogy t percnél tovább tart?

15. Legyen X véletlen változó, melyre $\mathbf{E}(X^2) < \infty$. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \mathbf{E}[(X - x)^2]$ az $x = \mathbf{E}X$ pontban veszi föl a minimumát, ami éppen $\mathbf{D}^2(X)$.