A sztochasztika alapjai

5. feladatsor: együttes eloszlás, kovariancia

Megoldások

1. A megtakarított pénzünket értékpapírba fektetjük, 20 darabot vásárolunk az A vállalat és 10 darabot a B vállalat részvényeiből. Egy év múlva a két vállalat részvényei várható értékben 700 illetve 1500 dollárt fognak majd érni, az árfolyamok szórása pedig 20 illetve 80 dollár.

(a) Tegyük fel, hogy a részvények árfolyama független egymástól. Várhatóan mennyit fog majd érni a portfóliónk egy év múlva? Mennyi a portfólió értékének a szórása?

(b) Tegyük fel, hogy a részvények árfolyama nem független egymástól. Az árfolyamok közötti korrelációs együttható függvényében írjuk fel formulával és ábrázoljuk a portfólió értékének várható értékét és varianciáját!

(c) Milyen kapcsolat van a korrelációs együttható és a befektetés kockázata között? Ha én egy kockázatkerülő befektető vagyok, akkor pozitív vagy negatív korrelációjú értékpapírokból állítsak össze portfóliót?

Megoldás. Jelölje X az A vállalat, Y pedig a B vállalat részvényének értékét egy év múlva. A feladat szerint $\mathbf{E}(X) = 700$, $\mathbf{D}(X) = 20$, $\mathbf{E}(Y) = 1500$, és $\mathbf{D}(Y) = 80$. Egy év múlva a portfóliónk értéke $20X + 10Y$.

(a) Az összeg várható értéke *mindig* a várható értékek összege, az összeg szórásnégyzete pedig akkor egyenlő a szórásnégyzetek összegével, ha a változók függetlenek (na jó, korrelálatlanság is elég). Tehát, *mindig*

$$\mathbf{E}(20X + 10Y) = 20\mathbf{E}(X) + 10\mathbf{E}(Y) = 29000,$$

és ha X és Y függetlenek, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2(20X + 10Y) &= \mathbf{D}^2(20X) + \mathbf{D}^2(10Y) = (20)^2\mathbf{D}^2(X) + (10)^2\mathbf{D}^2(Y)\\ &= 160000 + 640000 = 800000,\end{aligned}$$

azaz $\mathbf{D}(20X + 10Y) = 400\sqrt{5}$.

(b) Láttuk,

$$\mathbf{E}(20X + 10Y) = 20\mathbf{E}(X) + 10\mathbf{E}(Y) = 29000,$$

azaz a várható érték nem függ a korrelációtól.

A szórásnégyzet (variancia) az általános esetben, használva a korreláció $\rho(X, Y) = \mathbf{Cov}(X, Y)/(\mathbf{D}(X)\mathbf{D}(Y))$ definícióját, és hogy a kovariancia olyan mint a szorzás, bilineáris

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2(20X + 10Y) &= \mathbf{Cov}(20X + 10Y, 20X + 10Y)\\ &= \mathbf{Cov}(20X, 20X) + 2\mathbf{Cov}(20X, 10Y) + \mathbf{Cov}(10Y, 10Y)\\ &= \mathbf{D}^2(20X) + 2\mathbf{D}(X)\mathbf{D}(Y)\rho + \mathbf{D}^2(10Y)\\ &= 400^2 + 2 \cdot 400 \cdot 800 \cdot \rho + 800^2\\ &= 400^2(5 + 4\rho).\end{aligned}$$

Ez egyszerű lineáris függvény. Figyeljünk, hogy $\rho \in [-1, 1]$.

(c) Nyilván a kockázatos befektetés azért kockázatos, mert nagyon ingadozik a várható értéke körül, azaz a szórása nagyobb. Tehát, ha én kockázatkerülő vagyok, akkor minél kisebb szórásnégyzetű portfóliót szeretnék összerakni. Ezt úgy érhetem el, ha ρ a korreláció negatív.

3. Két szabályos kockával játszunk. Jelölje X az első kockával dobott számot és Y a dobott számok nagyobbikát. Adjuk meg az együttes eloszlást, kovarianciát, az összeg várható értékét és szórását!

Megoldás. Mind az X, mind az Y véletlen változó lehetséges értékei $\{1, 2, \ldots, 6\}$. Tehát X, Y diszkrét véletlen változók. Az (X, Y) vektorváltozó lehetséges értékei számpárok. Mivel $Y \geq X$, hiszen Y a két szám közül a nagyobb, ezért a lehetséges értékek halmaza

$$\{(i, j) \, : \, 1 \leq i \leq j \leq 6\} \, .$$

Először meghatározzuk a $\mathbf{P}((X, Y) = (1, 1))$ valószínűséget. Mivel X az első kockával dobott szám, Y pedig a két szám nagyobbika, ezért csak úgy lehet mindekettő 1, ha mindkét kockával 1-et dobtunk. Mivel az összes eset száma $6 \cdot 6 = 36$, így

$$\mathbf{P}((X, Y) = (1, 1)) = \mathbf{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{36}.$$

Most vizsgáljuk a $\mathbf{P}(X = 1, Y = 2)$ valószínűséget. Az első kockával megint 1-et dobtunk, és a dobott számok maximuma 2. Ez csak úgy lehet, ha az első kockával 1-est, a másodikkal 2-est dobtunk. Megint 1 kedvező eset, ezért

$$\mathbf{P}((X, Y) = (1, 2)) = \mathbf{P}(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{36}.$$

Látjuk, hogy tetszőleges $j = 1, 2, \ldots, 6$ esetén

$$\mathbf{P}((X, Y) = (1, j)) = \mathbf{P}(X = 1, Y = j) = \frac{1}{36}.$$

Nézzük a $\mathbf{P}(X = 2, Y = 2)$ valószínűséget. (Persze, ha $X = 2$ akkor $Y \geq 2$.) Ez azt jelenti, hogy az első kockával 2-est dobtunk, és a dobott számok nagyobbika 2. Ez úgy lehet, ha a második kockával 1-est vagy 2-est dobtunk. Azaz, most két kedvező eset van,

$$\mathbf{P}((X, Y) = (2, 2)) = \mathbf{P}(X = 2, Y = 2) = \frac{2}{36}.$$

Ha $X = 2$ és $Y = 3$, akkor az első kockával 2-est dobtunk, a nagyobbik szám pedig 3, tehát a második kockával 3-ast dobtunk. Ez megint egy eset, tehát

$$\mathbf{P}(X = 2, Y = 3) = \frac{1}{36}.$$

Ugyanígy tetszőleges $j \geq 3$ esetén

$$\mathbf{P}(X = 2, Y = j) = \frac{1}{36}.$$

Most már látjuk az általános képet. Ha $X = i$, $Y = i$, akkor az azt jelenti, hogy az első kockával i-t dobtunk, és a nagyobbik szám i, tehát a második kockával az $1, 2, \ldots, i$ számok valamelyikét dobtuk. Ez i lehetőség, azaz

$$\mathbf{P}(X = i, Y = i) = \frac{i}{36}.$$

Ha pedig $X = i$ és $Y = j > i$, akkor az első szám i, a nagyobbik j, és mivel ez nem lehet az első, ezért a második j. Tehát

$$\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{36}.$$

Röviden

$$\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{i}{36}, & \text{ha } i = j, \\ \frac{1}{36}, & \text{ha } i < j. \end{cases}$$

Ez az együttes eloszlás.

A peremeloszlásokat úgy kapjuk meg, hogy rögzítjük az egyik változó értékét, és kiösszegzünk a másik összes lehetséges értékére (folytonos esetben ugyanez, csak összegzés helyett, a sűrűséget kell integrálni). Azaz

$$\mathbf{P}(X = i) = \sum_{j=i}^{6} \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{i}{36} + \sum_{j=i+1}^{6} \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Ez persze nem nagy meglepetés, ehhez nem kellett volna ennyit számolni. A szabályos kockával $1/6$ a valószínűsége minden lehetséges értéknek. Az Y eloszlása pedig

$$\mathbf{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^{j} \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{36} + \frac{j}{36} = \frac{2j - 1}{36}.$$

Innen a várható értékek definíció szerint számolhatók. Valóban

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot i = \frac{1}{6} \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2},$$

és

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{j=1}^{6} \frac{2j - 1}{36} \cdot j = \frac{1}{36} \left(2 \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} - \frac{6 \cdot 7}{2} \right) = \frac{182 - 21}{36} = \frac{161}{36}.$$

Az összeg várható értéke az a várható értékek összege, azaz

$$\mathbf{E}(X+Y) = \frac{7}{2} + \frac{161}{36} = \frac{126+161}{36} = \frac{287}{36}.$$

Az összeg szórásnégyzetének kiszámítása macerásabb, hiszen X és Y nyilván nem függetlenek (hát persze, a lehetséges értékek $1, 2, \ldots, 6$, ugyanakkor $X \leq Y$). Az összeg szórásnégyzete akkor egyenlő a szórásnégyzetek összegével, ha *a változók függetlenek* (vagy korrelálatlanok). Általában, a kovariancia tulajdonságai szerint (vegyük észre, hogy a kovariancia úgy viselkedik, mint egy szorzás; pontosabban ő egy bilineáris funkcionál)

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2(X+Y) &= \mathbf{Cov}(X+Y, X+Y) = \mathbf{Cov}(X,X) + 2\mathbf{Cov}(X,Y) + \mathbf{Cov}(Y,Y) \\ &= \mathbf{D}^2(X) + 2\mathbf{Cov}(X,Y) + \mathbf{D}^2(Y).\end{aligned}$$

A szórásnégyzetek definíció alapján számolhatók

$$\mathbf{D}^2(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot i^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6 \cdot 6} - \frac{49}{4} = \frac{182 - 147}{12} = \frac{35}{12}.$$

Ugyanígy

$$\mathbf{D}^2(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - (\mathbf{E}(Y))^2,$$

és

$$\mathbf{E}(Y^2) = \sum_{j=1}^{6} \frac{2j-1}{36} \cdot j^2 = \frac{1}{36}\left(2\left(\frac{6 \cdot 7}{2}\right)^2 - \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6}\right) = \frac{791}{36},$$

tehát

$$\mathbf{D}^2(Y) = \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = \frac{2555}{1296}.$$

Maradt a kovariancia. A kovariancia tulajdonságai szerint

$$\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - (\mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)).$$

A várható értékeket már kiszámoltuk, tehát már csak a szorzat várható értéke kell. A szorzat egy kétváltozós függvény, tehát a várható érték tulajdonságai szerint

$$\mathbf{E}(XY) = \sum_{i,j} \mathbf{P}(X=i, Y=j) \cdot i \cdot j.$$

Ez egy 21 tagú összeg, ki kell számolni:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(XY) &= \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=i}^{6}\mathbf{P}(X=i,Y=j)\cdot i\cdot j \\
&= \sum_{i=1}^{6} i\left(i\cdot\frac{i}{36}+\frac{1}{36}\frac{6\cdot 7-i(i+1)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6} i\cdot\left(i^2+21-\frac{i(i+1)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}\left[\frac{i^3}{2}-\frac{i^2}{2}+21\cdot i\right] \\
&= \frac{1}{36}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{6\cdot 7}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{6\cdot 7\cdot 13}{6}+21\cdot\frac{6\cdot 7}{2}\right]=\frac{154}{9}
\end{aligned}
$$

Tehát

$$\mathbf{Cov}(X,Y)=\frac{154}{9}-\frac{7}{2}\cdot\frac{161}{36}=\frac{35}{24}.$$

A kovariancia pozitivitása azt jelenti, hogy ha az egyik változó nagy, akkor a másik is hajlamos nagyobb lenni. Ez intuitíven világos ebben a példában.

4. Válasszunk két számot egymástól függetlenül az egyenletességi hipotézis szerint a $(0,1)$ intervallumból! Adjuk meg a maximum és a minimum együttes eloszlását, és számoljuk ki a kovarianciájukat!

Megoldás. Legyen U_1 és U_2 a két, függetlenül egyenletes eloszlás szerint választott pont, és jelölje X a maximumot, Y pedig a minimumot. Először meghatározzuk X és Y eloszlását külön-külön.

Világos, hogy X lehetséges értékei a $[0,1]$ intervallum elemei, és $x\in[0,1]$ esetén $\{X\le x\}$ pontosan akkor teljesül, ha mindkét pont a $[0,x]$ intervallumba esik, aminek valószínűsége x^2. Tehát

$$F(x)=\mathbf{P}(X\le x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\le 0,\\ x^2, & \text{ha } x\in[0,1],\\ 1, & \text{ha } x\ge 1.\end{cases}$$

Innen deriválással kapjuk a sűrűségfüggvényt, azaz

$$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{ha } x\in(0,1),\\ 0, & \text{különben.}\end{cases}$$

A várható érték

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 x \cdot 2x \mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

Hasonlóan, az Y lehetséges értékei a $[0,1]$ intervallum elemei, és $\{Y \leq y\}$ pontosan akkor teljesül, ha legalább 1 pont a $[0,y]$ intervallumba esik, azaz vagy pontosan 1 esik oda, aminek a valószínűsége

$$2 \cdot y \cdot (1-y),$$

melyik pont esik oda, az a $[0,y]$-ba esik, a másik pedig nem; vagy pontosan 2 pont esik oda, aminek a valószínűsége

$$y^2,$$

hiszen ekkor mindkettő a $[0,y]$-ba esik. Tehát az eloszlásfüggvény

$$G(y) = \mathbf{P}(Y \leq y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } y \leq 0, \\ 2y(1-y) + y^2 = 2y - y^2, & \text{ha } y \in [0,1], \\ 1, & \text{ha } y \geq 1. \end{cases}$$

Innen a sűrűségfüggvény

$$g(y) = \begin{cases} 2 - 2y, & \text{ha } y \in (0,1), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

A várható érték

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^1 y(2-2y) \mathrm{d}y = \frac{1}{3}.$$

Ez heurisztikusan világos, hiszen 2 véletlen pont nagyjából 3 egyforma hosszú intervallumra osztja az egységnyi intervallumot. Tehát a kisebbik pont várható értéke $1/3$, a nagyobbiké pedig $2/3$, ahogy kiszámoltuk.

Nézzük most az együttes eloszlást. Legyen

$$\mathbf{P}(X \leq x, Y \leq y) = H(x,y)$$

az együttes eloszlásfüggvény. Mivel a lehetséges értékek a halmaza $[0,1] \times [0,1]$, ezért

$$H(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geq 1, y \geq 1, \\ \mathbf{P}(X \leq x), & \text{ha } y \geq 1, \\ \mathbf{P}(Y \leq y), & \text{ha } x \geq 1, \\ 0, & \text{ha } x \leq 0 \text{ vagy } y \leq 0. \end{cases}$$

Így az érdekes eset amikor $x, y \in [0,1]$. Sőt, mivel $X \geq Y$, így ha $x \leq y$ akkor

$$\mathbf{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbf{P}(X \leq x).$$

Hát persze, ha a maximum kisebb, mint x, akkor a minimum is kisebb, így az a feltétel elhagyható. Legyen tehát $1 \geq x > y \geq 0$. Ekkor az $\{X \leq x, Y \leq y\}$ esemény akkor következik be, ha mindkét pont $\leq x$, és legalább egy pont $\leq y$. Ez úgy lehet, ha vagy mindkét pont a $[0, y]$-ba esik, aminek a valószínűsége y^2, vagy az egyik a $[0, y]$-ba, a másik $(y, x]$-be, aminek a valószínűsége $2 \cdot y \cdot (x - y)$ (melyik pont, hova, hova). Tehát

$$\mathbf{P}(X \leq x, Y \leq y) = y^2 + 2y(x - y) = 2xy - y^2.$$

Összegezve,

$$H(x,y) = \mathbf{P}(X \leq x, Y \leq y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geq 1, y \geq 1, \\ \mathbf{P}(X \leq x), & \text{ha } y \geq 1, \\ \mathbf{P}(Y \leq y), & \text{ha } x \geq 1, \\ \mathbf{P}(X \leq x), & \text{ha } x \leq y, \\ 2xy - y^2, & \text{ha } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{ha } x \leq 0 \text{ vagy } y \leq 0. \end{cases}$$

Látjuk, hogy kétváltozós eloszlásfüggvény meghatározása nehezebb. A sűrűségfüggvény többváltozós esetben is az eloszlásfüggvény deriváltja, csak most minden változó szerint egyszer kell deriválni. Először x szerint deriválunk, az y-t konstansnak tekintve, majd az eredmény deriváljuk y szerint. Az eloszlásfüggvény alakjából látjuk, hogy csak ott nem 0 a sűrűség, ahol x-től és y-tól is függ az eredmény, azaz

$$h(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \begin{cases} 2, & \text{ha } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Persze a sűrűség éppen azon a tartomány nem tűnik el, ami az (X, Y) vektor lehetséges értékeit adják, ami most $\{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$. Ezek után kiszámolhatjuk a kovarianciát. A formula szerint

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y),$$

és a várható értékeket már ismerjük. A szorzat várható értéke, a várható érték tulajdonságainál megismert formula szerint (szorzat, mint kétváltozós függvény)

$$\mathbf{E}(XY) = \int\int h(x,y) xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^x 2xy \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 x \cdot x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

Az előbbi integrálásnál figyeljünk a határokra: rögzített $x \in [0, 1]$ esetén $y \in [0, x]$-re lesz $h = 2$! Tehát

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{36}.$$

5. Legyen X és Y együttes sűrűsége f, ahol

(a) $h(x, y) = xe^{-x(1+y)}$, ha $x, y \geq 0$;

(b) $h(x, y) = 6xy^2$, ha $x, y \in [0, 1]$;

(c) $h(x, y) = 2xy + x$, ha $x, y \in (0, 1)$;

(d) $h(x, y) = (x + y)^2 - (x - y)^2$, ha $x, y \in (0, 1)$.

Határozzuk meg a kovarianciamátrixot!

Megoldás. Ez egyszerű számolás. A definíciót kell tudni. Megcsináljuk az (a), (b) részt.

(a) Az X sűrűségét jelölje f, Y-ét g. Ekkor a peremeloszlás sűrűségére vonatkozó formula szerint $x > 0$ esetén

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\mathrm{d}y = \int_0^{\infty} xe^{-x(1+y)}\mathrm{d}y = e^{-x} \int_0^{\infty} xe^{-xy}\mathrm{d}y = e^{-x}[-e^{-xy}]_{y=0}^{\infty} = e^{-x},$$

és, a parciális integrálás formulája szerint $y > 0$ esetén ($\int f'g = fg - \int fg'$)

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} xe^{-x(1+y)}\mathrm{d}x \\ &= \left[x(-1)(1 + y)^{-1}e^{-x(1+y)}\right]_{x=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} (-1)(1 + y)^{-1}e^{-x(1+y)}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{(1 + y)^2}. \end{aligned}$$

Tehát X sűrűsége

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases},$$

és Y-é

$$g(y) = \begin{cases} (1 + y)^2, & \text{ha } y \geq 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

A várható értékek

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^{\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x = 1,$$

és

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^{\infty} y\frac{1}{(1 + y)^2}\mathrm{d}y > \int_3^{\infty} \frac{2}{y}\mathrm{d}y = \infty.$$

Itt annyit használtunk, hogy $y/(1 + y)^2 > 1/(2y)$ ha $y > 3$, és hogy az $1/y$ integrálja végtelen a $(3, \infty)$ intervallumon. Tehát Y várható értéke nem létezik. Vannak olyan változók, amiknek nincs várható értéke, ezen ne lepődjünk meg. Ekkor a szórás sem létezik, így kovariancia sem.

(b) Egyszerű, a korábbi jelölésekkel, ha $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 6xy^2\mathrm{d}y = 2x,$$
$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\mathrm{d}x = \int_0^1 6xy^2\mathrm{d}x = 3y^2.$$

Látjuk, hogy $h(x,y) = f(x)g(y)$, ami azzal ekvivalens, hogy a változóink függetlenek. Ekkor kovarianciájuk 0. Várható értékek és a második momentumok:

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 2x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3},$$
$$\mathbf{E}(X^2) = \int_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 2x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$
$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^1 yg(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 3y^3\mathrm{d}y = \frac{3}{4},$$
$$\mathbf{E}(Y^2) = \int_0^1 y^2g(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 3y^4\mathrm{d}y = \frac{3}{5}.$$

És a szórásnégyzet:

$$\mathbf{D}^2(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18},$$
$$\mathbf{D}^2(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - (\mathbf{E}(Y))^2 = \frac{3}{4} - \frac{9}{25} = \frac{39}{100}.$$

10. Mutassuk meg, hogy két független Poisson-eloszlású véletlen változó összege is Poisson–eloszlású!

Megoldás. Itt először is a Poisson-eloszlás definícióját kell tudni. Az X Poisson-eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel, ha nemnegatív egész értékű, és

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Legyenek tehát X, Y független Poisson-eloszlású véletlen változók $\lambda > 0$ és $\mu > 0$ paraméterekkel. Ekkor a $Z = X + Y$ változó lehetséges értékei is $0, 1, \ldots$, és ha $Z = n$ akkor $X = k$ és $Y = n - k$ valamilyen k-ra, ahol persze $k = 0, 1, \ldots, n$. Vagyis

$$\mathbf{P}(Z = n) = \mathbf{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X = k, Y = n - k).$$

Eddig nem használtunk igazából semmit. Mivel X, Y függetlenek, ezért az utóbbi összeg tagjait szorzattá alakíthatjuk, azaz

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X = k) \cdot \mathbf{P}(Y = n - k).$$

Most használjuk, hogy X és Y is Poisson, és egy kicsit számolunk. Ezért

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\mu} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} \\ &= \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)}. \end{aligned}$$

Itt a binomiális tételt használtuk, és a binomiális együttható alakját, semmi extra. Tehát azt kaptuk, hogy tetszőleges $n = 0, 1, \ldots$ esetén

$$\mathbf{P}(Z = n) = \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)},$$

na de ez éppen a $(\lambda + \mu)$ paraméterű Poisson-eloszlás definíciója. Kész vagyunk.