

Alkalmazott statisztika

4. házi feladat

Beadási határidő: 2019. november 21.

1. Igazoljuk, hogy ha két szimmetrikus mátrixhoz tartozó kvadratikus alak megegyezik, akkor a két mátrix megegyezik! Példával igazoljuk, hogy a szimmetrikussági feltétel nem hagyható el!

2. *Lukács Jenő tétele.* A Fisher–Cochran-tétel alkalmazásával mutassuk meg, hogy ha X_1, \dots, X_n független standard normálisok, akkor a mintaátlag és az empirikus szórásnégyzet függetlenek! Adjuk meg explicit alakban a felbontást, a vetítéseket és a megfelelő altereket!

3. Legyenek X, Y diszkrét véletlen változók. Láttuk valószínűségszámításból, hogy $\mathbf{E}[X|Y]$ feltételes várható érték Y függvénye, azaz $\mathbf{E}[X|Y] = h(Y)$ valamilyen $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre. Igazoljuk, hogy

$$\min_g \mathbf{E} [(X - g(Y))^2] = \mathbf{E} [(X - \mathbf{E}[X|Y])^2],$$

azaz Y függvényei közül a feltételes várható érték közelít legjobban L^2 -távolságban. (Gondoljuk végig, hogy most milyen altérre vetítünk!)