Alkalmazott statisztika

1. házi feladat: többdimenziós normális

Beadási határidő: 2019. szeptember 19.

1. Legyenek $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ független független többdimenziós normális eloszlású véletlen vektorok, ahol $\mathbf{X}_i$ eloszlása $N_k(\mathbf{m}_i, \Sigma)$ (azaz a kovarianciamátrix azonos). Legyenek

$$\mathbf{V}_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{X}_i, \quad \mathbf{V}_2 = \sum_{i=1}^{n} d_i \mathbf{X}_i.$$

Igazoljuk, hogy $\mathbf{V}_1 \sim N_k(\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{m}_i, \sum_{i=1}^n c_i^2 \Sigma)$, és $(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ együttesen normálisok, és kovarianciamátrixuk

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n c_i^2\, \Sigma & \sum_{i=1}^n c_i d_i\, \Sigma \\ \sum_{i=1}^n c_i d_i\, \Sigma & \sum_{i=1}^n d_i^2\, \Sigma \end{pmatrix}.$$

Azaz $\mathbf{V}_1$ és $\mathbf{V}_2$ függetlenek, ha $\sum_{i=1}^n c_i d_i = 0$.

2. Legyen $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^\top \sim \mathcal{N}_3(\mathbf{m}, \Sigma)$, ahol $\mathbf{m} = (-3, 1, 4)^\top$, és

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg az (U, V) vektor eloszlását, ahol $U = X_2$, $V = X_2 - 2X_1 + X_3$. Írjuk fel az együttes sűrűségfüggvényt explicit alakban!